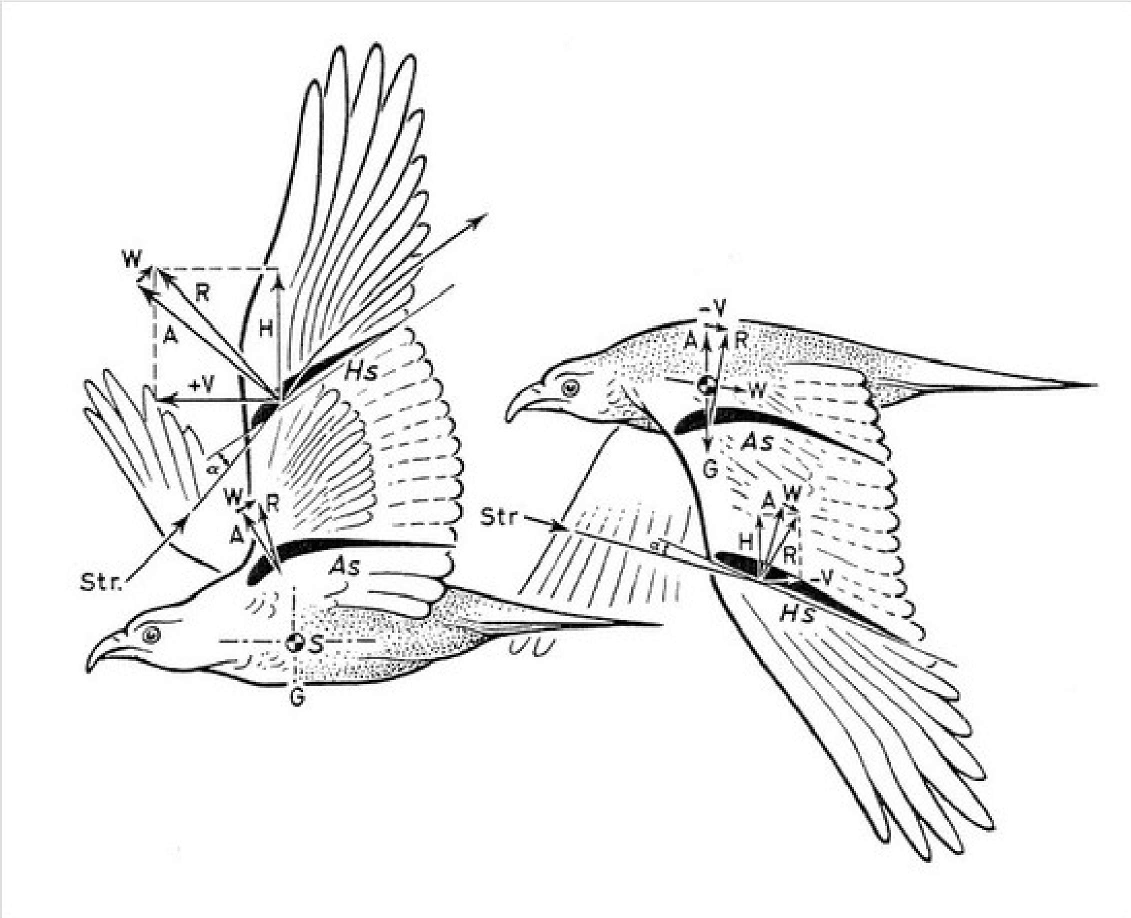
Orvosi biofizika - számolási példák

- 75 példa -



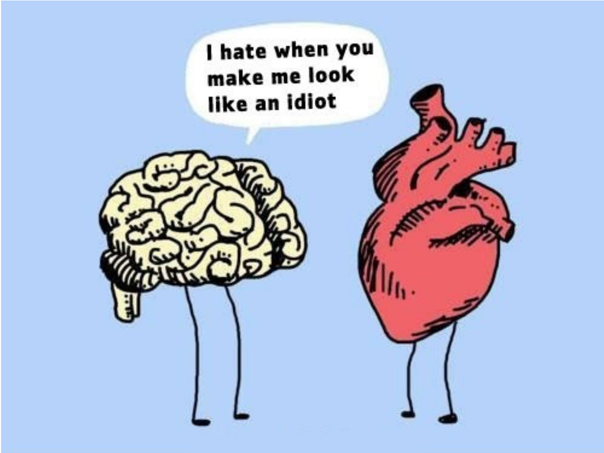
a madár repülésének biofizikája

szerkesztette: Borbély Márton

utolsó módosítás: 2016. június 16.

Tartalom

Előszó



„Az idő lassan elszivárog,
nem lógok a mesék tején,
hörpintek valódi világot,
habzó éggel a tetején.”

József Attila: Ars poetica (részlet)

Kedves Olvasó!

Mikor 1. évfolyamos orvostanhallgatóként először találkoztam az „Orvosi biofizika” nevű tantárggyal, gyorsan a szívembe zártam. Ez messze nem azt jelentette, hogy már az elején könnyen ment, de az előadások érdekesek voltak, a gyakorlatokon szinte mindig kijöttek az előzetesen várt eredmények, és nem utolsósorban az Intézet (Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet) összes dolgozója közvetlen és emberséges volt hozzám. Itt külön meg kell emlékeznem Dr. Kellermayer Miklósról, aki kiváló gyakorlatvezető és nagyszerű tanár volt. Éreztem, hogy engem ez az egész érdekel, mert rólam szól. Szeretem ebben a disciplinában, hogy összefüggésekre épül, és ha az alapokat rendesen megtanulja valaki, akkor láthatóvá válik valami, ami több is lehet, mint a részek összege. Aki gimnáziumban szerette a matematikát és/vagy a fizikát, annak ez a tárgy más lesz, mint a többi. Itt lehet logikázni, számolni, számítógéppel mérési eredményeket ábrázolni. Szóval lehet valami mást is csinálni, mint winchesterest játszani … Nekem ezért volt üdítő kivétel.

Demóra készülve szembesültem azzal, hogy az Intézet által kiadott „Feladatok”-ban csak az eredmények voltak leírva, a megoldás menete nem. A keleti világ megismerése óta tudjuk, hogy *az út maga a jutalom*, így nem elégedhettem meg ennyivel. Az egyetem elején gyorsan rájön a hallgató (Egyébként tudja valaki, hogyan lesz a diákból hallgató? Mostantól nem kérdezhet, csak hallgathat?) hogy milyen sok múlik azon, miből és hogyan tanul. Ha csak eggyel kevesebb „Miből?” kérdés hangzik el, már megérte ez a néhány oldal a befektetett időt és energiát. Egyúttal arra biztatlak, hogy kedvenc tantárgyad anyagát tedd valahogyan fogyaszthatóbbá sorstársaid számára. Kevés valóban jól érthető és aktuális könyv/jegyzet/oktatási segédanyag áll a rendelkezésünkre. Ez nem a mi hibánk, viszont szemeszter végén mindig mi vizsgázunk. Ilyen téren nem várható változás a közeljövőben. Mindenkinek máshoz van adottsága és érzéke, találd meg azt a módot, ahogyan segíteni tudsz! Légy szíves, használat után feltétlenül adj visszajelzést úgy, hogy kitöltöd a következő linken található kérdőívet! Kell a feedback. Előre is köszönöm.

A jegyzetet az ingyenes és nyílt forráskódú LibreOffice Writer program segítségével készítettem. (A program egyaránt szabadon letölthető Linuxra, Macre és Windowsra is.) Ha pdf-ben továbbítod, akkor biztosan meg tudja nyitni az, akinek küldöd, viszont – sajnos - nem tud beleszerkeszteni, így azt ajánlom az egész világnak, hogy most térjen át a szabad szoftverek használatára! Sosem késő. Jogdíj nincs, de sikeres demó/vizsga után meghívhatsz egy sörre (vagy kettőre). ☺

Kívánok szép „Ááá, már értem!” pillanatokat,

A szerkesztő

Ps.: Ha szeretnél velem kapcsolatba lépni, itt megteheted: **borbelymarci@gmail.com**

1. példa

Mekkora lenne a normálállapotú levegő $\left(T = 0^oC;\quad p = 101\,kPa\right)$ *oxigén és nitrogén molekuláinak sebessége, ha valamennyien ugyanakkora mozgási energiával rendelkeznének?*

Adatok:

- hőmérséklet: $T = 0^oC = 273\,K$ *(szöveg)*
- nyomás: $101\,kPa = 1{,}01\cdot 10^5\,Pa$ *(szöveg)*
- moláris tömeg (O_2): $M_{O_2} = 32\,\frac{g}{mol} = 3{,}2\cdot 10^{-2}\,\frac{kg}{mol}$ *(Állandók és adatok)*
- moláris tömeg (N_2): $M_{N_2} = 28\,\frac{g}{mol} = 2{,}8\cdot 10^{-2}\,\frac{kg}{mol}$ *(Állandók és adatok)*
- Boltzmann-állandó: $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvény:

$$\overline{\varepsilon_{mozgási}} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\overline{v^2} = \frac{3}{2}\cdot k\cdot T$$

(I. A „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.34)

- $\overline{\varepsilon_{mozgási}}$: egy részecskére eső átlagos mozgási energia
- m: egy részecske tömege
- $\overline{v^2}$: a részecskék sebességnégyzeteinek átlaga
- k: Boltzmann-állandó
- T: abszolút hőmérséklet $[K]$

Számolás:

$$\overline{\varepsilon_{mozgási}} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\overline{v^2} = \frac{3}{2}\cdot k\cdot T$$

↓

$$\overline{v^2} = \frac{\frac{3}{2}\cdot k\cdot T}{\frac{1}{2}\cdot m} = \frac{3\cdot k\cdot T}{m}$$

Tételezzük fel, hogy minden részecske ugyanazzal a sebességgel mozog (azaz ugyanannyi a mozgási energiája). Így a sebességnégyzetek átlaga megegyezik az átlagsebesség négyzetével:

$$\overline{v^2} = \left(\bar{v}\right)^2 = \frac{3\cdot k\cdot T}{m}$$

↓ */ ebből az átlagos sebesség*

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3\cdot k\cdot T}{m}}$$

↓ */ A gyök alatti törtet az Avogadro-féle számmal (N_A) bővítjük.*

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3\cdot k\cdot N_A\cdot T}{m\cdot N_A}}$$

Az $R = k \cdot N_A$ és $M = m \cdot N_A$ egyenlőségeket felhasználva

- R: az egyetemes gázállandó
- N_A: az Avogadro-féle szám $\left(6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}\right)$ *(Állandók és adatok)*
- M: moláris tömeg

a következőképpen alakítható át a képlet:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}}$$

Ebbe a képletbe kell behelyettesíteni egy oxigén-, illetve nitrogénmolekula móltömegét $\frac{kg}{mol}$ -ban és a hőmérsékletet kelvinben.

O_2: $\bar{v} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314 \cdot 273}{3{,}2 \cdot 10^{-2}}} = \sqrt{212786} = 461 \frac{m}{s}$

N_2: $\bar{v} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314 \cdot 273}{2{,}8 \cdot 10^{-2}}} = \sqrt{243185} = 493 \frac{m}{s}$

<u>Válasz:</u> Az oxigén molekuláinak $461 \frac{m}{s}$, a nitrogén molekuláinak $493 \frac{m}{s}$ sebessége lenne.

2. példa

Hány fokon duplázódik meg (testhőmérséklethez viszonyítva) a fehérjemolekula H-kötéseiben a termikus hibahelyek száma, ha a kötési energia 18,8 kJ/mol?

Adatok:

- testhőmérséklet: $T_{test} = 37\,^oC = 310\,K$ *(fej)*
- $\dfrac{n_2}{n_1} = 2$ *(szöveg)*
- kötési energia: $\Delta E = 18{,}8\dfrac{kJ}{mol} = 1{,}88\cdot 10^4\dfrac{J}{mol}$ *(szöveg)*

A termikus hibahely felszakított hidrogénhidat jelent.

Releváns törvények:

$$n_i = n_0\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k\cdot T}} \quad \text{és} \quad R = N_A\cdot k$$

(I. A „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.25)

- n_i: a felszakított hidrogénhidak száma
- n_0: az ép hidrogénhidak száma
- e: Euler-féle szám $(\approx 2{,}7183)$
- $\Delta\varepsilon$: egy hidrogénhíd kötési energiája $(\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$
- k: Boltzmann-állandó $\left(1{,}38\cdot 10^{-23}\dfrac{J}{K}\right)$

Számolás:

Először kiszámoljuk a testhőmérséklethez tartozó termikus hibahelyek arányát, majd vesszük ennek kétszeresét, és kiszámoljuk az ehhez tartozó hőmérsékletet.

↓

$$n_i = n_0\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k\cdot T}} = n_0\cdot e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}}$$

- ΔE: egy mól hidrogénhíd kötési energiája
- R: az egyetemes gázállandó $\left(8{,}314\dfrac{J}{mol\cdot K}\right)$

↓

$$\frac{n_i}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}} = e^{-\frac{1{,}88\cdot 10^4}{8{,}314\,\cdot\,310}} = 6{,}7937\cdot 10^{-4} \quad \rightarrow \text{ ennek kétszerese:} \quad 6{,}7937\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 1{,}35874\cdot 10^{-3}$$

$$1{,}35874\cdot 10^{-3} = \frac{n_i}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}}$$

↓ / *behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\ln\left(1{,}35874\cdot 10^{-3}\right) = -\frac{1{,}88\cdot 10^4}{8{,}314\cdot T}$$

↓

$$T = \frac{1{,}88\cdot 10^4}{8{,}314\cdot\ln\left(1{,}35874\cdot 10^{-3}\right)} = 342{,}6\,K = (342{,}6-273)\,^0C = 69{,}6\,^0C$$

Válasz: 69,6 ºC-on duplázódik meg a termikus hibahelyek száma.

3. példa

Hány termikus hibahely van közelítőleg egy 1400 H-kötést tartalmazó fehérje molekulában 37 °C-on, ha a kötési energia 18,8 kJ/mol?

Adatok:

- H-kötések száma: $n_0 + n_1 = 1400$ *(szöveg)*
- hőmérséklet: $T = 37\,^oC = 310\,K$ *(szöveg)*
- egy mól H-híd kötési energiája: $\Delta E = 18{,}8 \dfrac{kJ}{mol} = 1{,}88 \cdot 10^4 \dfrac{J}{mol}$ *(szöveg)*
- Boltzmann-állandó: $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \dfrac{J}{K}$ *(Állandók és adatok)*
- egyetemes gázállandó: $R = 8{,}314 \dfrac{J}{mol \cdot K}$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvények:

(I. A „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.25)

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k \cdot T}} \quad \text{és} \quad R = N_A \cdot k$$

- n_i: a felszakított hidrogénhidak száma
- n_0: az ép hidrogénhidak száma
- e: Euler-féle szám $(\approx 2{,}7183)$
- $\Delta\varepsilon$: egy hidrogénhíd kötési energiája $(\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$
- k: Boltzmann-állandó

↓

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k \cdot T}} = n_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{R \cdot T}}$$

- ΔE: egy mól hidrogénhíd kötési energiája
- R: egyetemes gázállandó

Számolás:

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R \cdot T}} = e^{-\frac{1{,}88 \cdot 10^4}{8{,}314 \cdot 310}} = 6{,}79 \cdot 10^{-4}$$

Az arányszámból látható, hogy n_0 sokkal nagyobb, mint n_1, ezért n_1 az n_0 mellett elhanyagolható.

$$1400 = n_0 + n_1 \approx n_0$$

↓

$$\frac{n_1}{1400} = 6{,}79 \cdot 10^{-4}$$

↓

$$n_1 = 0{,}95 \approx 1$$

Válasz: 1 termikus hibahely van közelítőleg.

4. példa

A kötések hány százaléka van felszakított állapotban testhőmérsékleten, különböző kötési energiák (200 kJ/mol, illetve 0,5 kJ/mol) esetén?

Adatok:

- testhőmérséklet: $T_{test} = 37^{o}C = 310\,K$ *(fej)*
- $E_{köt(1)} = 200\dfrac{kJ}{mol} = 2\cdot 10^{5}\dfrac{J}{mol}$ *(szöveg)*
- $E_{köt(1)} = 0{,}5\dfrac{kJ}{mol} = 5\cdot 10^{2}\dfrac{J}{mol}$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

$n_i = n_0\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k\cdot T}}$ és $R = N_A\cdot k$

(I. A „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.25)

- n_i: a felszakított kötések száma
- n_0: az ép kötések száma
- e: Euler-féle szám $(\approx 2{,}7183)$
- $\Delta\varepsilon$: egy kötés energiája $(\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$
- k: Boltzmann-állandó $\left(1{,}38\cdot 10^{-23}\dfrac{J}{K}\right)$

↓

$n_i = n_0\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k\cdot T}} = n_0\cdot e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}}$

- ΔE: egy mól kötés energiája
- R: az egyetemes gázállandó $\left(8{,}314\dfrac{J}{mol\cdot K}\right)$

Számolás:

A példa a felszakított kötések arányára (%) kérdez rá, tehát a következő hányadost kell kiszámolnunk:

$$\frac{n_1}{n_{összes}} = \frac{n_1}{n_1+n_0}$$

200 kJ/mol moláris kötési energia esetén: $\dfrac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}} = e^{-\frac{2\cdot 10^5}{8{,}314\cdot 310}} = 2\cdot 10^{-34}$

0,5 kJ/mol moláris kötési energia esetén: $\dfrac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}} = e^{-\frac{5\cdot 10^2}{8{,}314\cdot 310}} = 0{,}82366$

A kérdés viszont a következő arányra kérdez rá:

$$\frac{n_1}{n_{összes}} = \frac{n_1}{n_1+n_0}$$

Mivel a törtet tetszőlegesen bővíthetjük (hiszen csak arányra és nem konkrét számokra vagyunk kíváncsiak), válasszuk az $\dfrac{n_1}{n_0}$ hányados nevezőjét 1-nek.

Az első esetben $\left(n_1 = 2\cdot 10^{-34}\right)$ így: $$\frac{n_1}{n_{összes}} = \frac{n_1}{n_1+n_0} = \frac{2\cdot 10^{-34}}{2\cdot 10^{-34}+1} \approx 2\cdot 10^{-34} \quad \rightarrow \quad 2\cdot 10^{-32}\ \%$$

A második esetben $\left(n_1 = 0{,}82366\right)$: $$\frac{n_1}{n_{összes}} = \frac{n_1}{n_1+n_0} = \frac{0{,}82366}{0{,}82366+1} \approx 0{,}45 \quad \rightarrow \quad 45\ \%$$

Válasz: 200 kJ/mol esetén a kötések $2\cdot 10^{-32}$ %-a, míg 0,5 kJ/mol esetén a kötések 45 %-a van felszakított állapotban testhőmérsékleten.

5. példa

Mekkora kötési energia esetén marad meg a kötések 99,9 %-a testhőmérsékleten?

Adatok:

- $T_{test} = 37^oC = 310\,K$ *(fej)*
- $\frac{n_1}{n_0} = \frac{0{,}1\ \%}{99{,}9\ \%} \approx 0{,}001$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k \cdot T}} \quad \text{és} \quad R = N_A \cdot k$$

(I. Az „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.25)

- n_i: a felszakított kötések száma
- n_0: az ép kötések száma
- e: Euler-féle szám $(\approx 2{,}7183)$
- $\Delta\varepsilon$: egy kötés energiája $(\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$
- k: Boltzmann-állandó $\left(1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}\right)$

↓

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k \cdot T}} = n_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{R \cdot T}}$$

- ΔE: egy mól kötés energiája
- R: az egyetemes gázállandó $\left(8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K}\right)$

Számolás:

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R \cdot T}}$$

↓

$$\ln\left(\frac{n_1}{n_0}\right) = -\frac{\Delta E}{R \cdot T}$$

↓

$$-\ln\left(\frac{n_1}{n_0}\right) \cdot R \cdot T = \Delta E$$

↓

$$\Delta E = -\ln(0{,}001) \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 310\ K = 17.804\ \frac{J}{mol} \approx 17{,}8 \frac{kJ}{mol}$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta E}{N_A} = \frac{17.804}{6 \cdot 10^{23}} = 2{,}97 \cdot 10^{-20} \frac{J}{kötés}$$

Válasz: $17{,}8 \frac{kJ}{mol}$, illetve $2{,}97 \cdot 10^{-20} \frac{J}{kötés}$ kötési energia esetén marad meg (a két érték teljesen ugyanazt jelenti, csak másra vonatkoztatja az energiát).

7. példa *Nyugodt, 5 °C hőmérsékletű légkört feltételezve mekkora magasságban csökkenne felére, illetve e-edrészére az oxigénkoncentráció?*

Adatok:

- hőmérséklet: $T = 5^oC = 278\,K$ *(szöveg)*
- oxigéngáz moláris tömege: $M_{O_2} = 32\frac{g}{mol} = 0{,}032\frac{kg}{mol}$ *(Állandók és adatok)*
- $\left(\frac{c_1}{c_0}\right)_1 = \frac{1}{2}$
- $\left(\frac{c_1}{c_0}\right)_2 = \frac{1}{e}$

Releváns törvény:

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{k \cdot T}}$$

(I. Az „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.25)

- n_i: az i-edik energiaszinten lévő részecskék száma
- n_0: a legalacsonyabb energiaszinten lévő részecskék száma
- ε_i: az i-edik energiaszint energiája
- ε_0: a legalacsonyabb energiaszint energiája
- k: Boltzmann-állandó $\left(1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K}\right)$
- T: abszolút hőmérséklet $[K]$

Számolás:

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{k \cdot T}}$$

↓

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{k \cdot T}}$$

A képletet alakítsuk át a barometrikus magasságformulává. Ehhez használjuk fel, hogy $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$, illetve hogy ε itt helyzeti energiát jelent, vagyis $\varepsilon = m \cdot g \cdot h$ és $\varepsilon_0 = m \cdot g \cdot h_0$, ahol

- m: a szóban forgó gázmolekula tömege
- g: a nehézségi gyorsulás a Földön $\left(g_n = 9{,}81\frac{m}{s^2}\right)$
- h: a magasság

h_0-t célszerű 0 m-nek választani, hiszen a tengerszinthez (megegyezés szerint 0 m) viszonyítunk, ezért $\varepsilon_0 = 0$. Ezen megfontolások szerint $\Delta\varepsilon = m \cdot g \cdot h$, illetve a barometrikus formula, melynek kitevőjében a tört az Avogadro-számmal bővíthető:

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{m \cdot g \cdot h}{k \cdot T}} = e^{-\frac{m \cdot N_A \cdot g \cdot h}{k \cdot N_A \cdot T}} = e^{-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}}$$

Tudjuk továbbá a koncentrációról, hogy $n_i = c_i \cdot V$

- n_i: az i-edik elem mennyisége
- c_i: az i-edik elem koncentrációja
- V: a vonatkoztatási térfogat (ezért rögzített érték)

tehát: $\frac{n_1}{n_0} = \frac{c_1 \cdot V}{c_0 \cdot V} = \frac{c_1}{c_0} = e^{-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}}$

A példa a magasságra kérdez rá, ezért a fenti képletből fejezzük ki *h*-t:

$$\ln\left(\frac{c_1}{c_0}\right) = -\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}$$

↓

$$h = -\frac{R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{c_1}{c_0}\right)}{M \cdot g}$$

Legyen a tengerszintnél a koncentráció 1.

a) Az első esetben így a *h* magasságban lévő c_1 koncentráció értéke 0,5, ezért $\frac{c_1}{c_0} = 0{,}5$.

Behelyettesítve:

$$h = -\frac{8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 278\,K \cdot \ln 0{,}5}{0{,}032 \frac{kg}{mol} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} = 5103\,m$$

b) A második esetben $\frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{e}$

Behelyettesítve:

$$h = -\frac{8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 278\,K \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{0{,}032 \frac{kg}{mol} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} = 7363\,m$$

Válasz: 5103 m magasságban felére, 7363 m magasságban e-edrészére csökkenne az oxigénkoncentráció.

8. példa

A teljes elektromágneses spektrum optikai tartományában a látható sáv hullámhosszhatárai -kerekítve- 400-800 nm. Számítsuk ki a megfelelő fotonenergia-intervallum határait eV egységben!

Adatok:

- hullámhossz: $\lambda = 400 - 800\,nm = 4\cdot 10^{-7}\,m - 8\cdot 10^{-7}\,m$ *(szöveg)*
- fénysebesség: $c = 3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}$ *(Állandók és adatok)*
- átváltási arány: $1\ eV = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J$ *(fej)*
- Planck-állandó: $h = 6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvények:

$c = \lambda \cdot f$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.26)*

- c: a fény sebessége $\left(vákuumban:\ 3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}\right)$
- λ: hullámhossz $[m]$
- f: frekvencia $\left[Hz = \frac{1}{s}\right]$

$\varepsilon = h\cdot f$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.86)*

- ε: egy kötés energiája $[J]$
- h: Planck-állandó
- f: frekvencia $\left[Hz = \frac{1}{s}\right]$

Számolás:

Az intervallumot két lépésben számoljuk ki, először a maximumot, majd a minimumot.

a,

$c = \lambda \cdot f$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{4\cdot 10^{-7}\,m} = 7{,}5\cdot 10^{14}\,Hz \qquad \left(Hz = \frac{1}{s}\right)$$

$\varepsilon = h\cdot f$

↓

$$\varepsilon = \left(6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\,s\right)\cdot\left(7{,}5\cdot 10^{14}\,\frac{1}{s}\right) = 4{,}95\cdot 10^{-19}\,J$$

↓ */ energia átváltása*

$$\varepsilon = \frac{4{,}95\cdot 10^{-19}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 3{,}1\,eV$$

b, Ugyanúgy a fenti gondolatmenetet alkalmazzuk, de a hullámhossznál 400 nm helyett 800 nm-rel számolunk.

↓

$\varepsilon = 1{,}55\, eV$

<u>Válasz:</u> A fotonenergia-intervallum határai: 3,1 – 1,55 eV.

9. példa *Milyen hullámhosszúságú fény okoz fotokémiai hatást, ha az ehhez szükséges energia 240 kJ/mol?*

Adatok:

- fénysebesség: $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ (Állandók és adatok)
- Planck-állandó: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ (Állandók és adatok)
- Avogadro-féle szám: $N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$ (Állandók és adatok)
- 1 mólnyi kötés energiája: $E = 240 \frac{kJ}{mol} = 2{,}4 \cdot 10^5 \frac{J}{mol}$ (szöveg)

Releváns törvények:

$c = \lambda \cdot f$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.26)

- c: a fény sebessége $\left(vákuumban:\ 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \right)$
- λ: hullámhossz $[m]$
- f: frekvencia $\left[Hz = \frac{1}{s} \right]$

$\varepsilon = \frac{E}{N_A}$

- ε: egy kötés energiája $[J]$
- E: egy mólnyi kötés energiája $\left[\frac{J}{mol} \right]$
- N_A: az Avogadro-féle szám

$\varepsilon = h \cdot f$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.86)

- ε: egy kötés energiája $[J]$
- h: Planck-állandó
- f: frekvencia $\left[Hz = \frac{1}{s} \right]$

Számolás:

$$\varepsilon = \frac{E}{N_A} = \frac{2{,}4 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^{23}} = 4 \cdot 10^{-19} \frac{J}{kötés}$$

$$\varepsilon = h \cdot f$$

↓

$$f = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{4 \cdot 10^{-19}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}} = 6{,}0606 \cdot 10^{14}\ Hz \qquad \left(Hz = \frac{1}{s} \right)$$

$$c = \lambda \cdot f$$

↓

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

↓ *\/ behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}}{6{,}0606 \cdot 10^{14}\ \frac{1}{s}} = 0{,}495 \cdot 10^{-6}\, m = 495 \cdot 10^{-9}\, m = 495\, nm$$

<u>Válasz:</u> A 495 nm-es fény okoz fotokémiai hatást.

13. példa *Egy CO_2 lézer 20 W teljesítményű infravörös fényét 0,1 mm átmérőjű körfelületre fókuszáljuk. Mekkora lesz a sugárzás teljesítménysűrűsége (intenzitása)?*

Adatok:

- teljesítmény: $P = 20\,W$ *(szöveg)*
- átmérő: $d = 0{,}1\,mm = 1\cdot 10^{-4}\,m$ *(szöveg)*

Elmélet:

- teljesítménysűrűség (intenzitás): az egységnyi felületre merőlegesen eső sugárzás teljesítménye
- A példa nem említi, hogy mekkora szög alatt esik be a lézerfény, így azt feltételezzük, hogy a teljes sugárzás merőlegesen érkezik.

Releváns törvények:

$$J = \frac{P}{A}$$ *(intenzitás definíciója)*

- J: intenzitás (teljesítménysűrűség) $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- P: teljesítmény $[W]$
- A: besugárzott felület $[m^2]$

$$A_{kör} = r^2 \cdot \pi$$ *(matek)*

- $A_{kör}$: kör területe $[m^2]$
- r: sugár $[m]$
- π: pi (~3,14)

$$r = \frac{d}{2}$$ *(matek)*

- r: sugár $[m]$
- d: átmérő $[m]$

Számolás:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{1\cdot 10^{-4}\,m}{2} = 5\cdot 10^{-5}\,m$$

$$A_{kör} = r^2 \cdot \pi = \left(5\cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot \pi = 7{,}85\cdot 10^{-9}\,m^2$$

$$J = \frac{P}{A} = \frac{20\,W}{7{,}85\cdot 10^{-9}\,m^2} = 2{,}55\cdot 10^{9}\,\frac{W}{m^2}$$

Válasz: $2{,}55\cdot 10^{9}\,\frac{W}{m^2}$ lesz a sugárzás teljesítménysűrűsége (intenzitása).

14. példa

A CO_2 lézer fényének hullámhosszánál (10,6 μm) az izom gyengítési együtthatója 800 cm^{-1}, a Nd-YAG lézer hullámhosszánál (1,06 μm) 5,7 cm^{-1}. Milyen vastag izomrétegben nyelődik el a két lézer fényenergiájának 90 %-a?

Adatok:

- gyengítési együttható (CO_2): $\mu_{10,6\,\mu m} = 800\,cm^{-1}$ *(szöveg)*
- gyengítési együttható (Nd-YAG): $\mu_{1,06\,\mu m} = 5,7\,cm^{-1}$ *(szöveg)*
- $\frac{J}{J_0} = 0,1$ (90 %-át elnyeli → 10 %-át átengedi)

Releváns törvény:

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.11)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság $[cm]$
- μ: lineáris gyengítési együttható $[cm^{-1}]$

Számolás:

adatok $\frac{J}{J_0} = 0,1$

törvény $\frac{J}{J_0} = e^{-\mu \cdot x}$

↓ */ hiszen az adatok között a törvénynek megfelelő összefüggést feltételezünk*

$0,1 = e^{-\mu \cdot x}$

↓

$\ln(0,1) = \ln\left(e^{-\mu \cdot x}\right) = -\mu \cdot x$

↓ */ :-μ*

$x = \frac{\ln(0,1)}{-\mu}$

↓ */ behelyettesítjük a meglévő adatokat*

CO_2 lézer: $x = \frac{\ln(0,1)}{-\mu} = \frac{\ln(0,1)}{-800\,cm^{-1}} = 2,88 \cdot 10^{-3}\,cm = 2,88 \cdot 10^{-5}\,m$

Nd-YAG lézer: $x = \frac{\ln(0,1)}{-\mu} = \frac{\ln(0,1)}{-5,7\,cm^{-1}} = 4,04 \cdot 10^{-1}\,cm = 4,04 \cdot 10^{-3}\,m$

Válasz: CO_2 lézer esetében $2,88 \cdot 10^{-5}\,m$ $(\approx 0,03\,mm)$, Nd-YAG lézer esetében $4,04 \cdot 10^{-3}\,m$ $(\approx 4\,mm)$ mélyen nyelődik el a fényenergia 90 %-a.

15. példa

A szem optikai közegei az argonion-lézer 488 nm-es hullámhosszán a vízéhez hasonlóan kb. 10^{-4} cm^{-1}-es gyengítési együtthatóval jellemezhetők, a véré pedig ugyanezen hullámhossznál 330 cm^{-1}.

a) Hány %-os energiaveszteséggel éri el a 488 nm-es lézerfény a szemfeneket, ha az úthossz a szemben 2,5 cm?

b) E lézersugárral a szemfenéken egy kapillárist céloztunk meg fotokoaguláció céljából. Milyen vastag vérréteg csökkenti e fény intenzitását a felére?

Adatok:

- gyengítési együttható (a szem optikai közegei): $\mu_{szem} = 10^{-4}\ cm^{-1}$ *(szöveg)*
- gyengítési együttható (vér): $\mu_{vér} = 330\ cm^{-1}$ *(szöveg)*
- úthossz a szemben: $x_{szem} = 2{,}5\,cm$ *(szöveg)*
- úthossz a vérben: $x_{vér} = D_{vér}$ *(szöveg)*

a) Az energiaveszteség arányos az intenzitásveszteséggel.

Releváns törvény:

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.11)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság $[cm]$
- μ: lineáris gyengítési együttható $[cm^{-1}]$

Számolás:

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$

↓ */ átrendezzük az egyenletet, és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\mu \cdot x} = e^{-10^{-4} \cdot 2{,}5} = 0{,}99975$$

arány → százalék $0{,}99975 \cdot 100 = 99{,}975\ \%$ -a marad meg az intenzitásnak (energiának)

↓

A veszteség: $100 - 99{,}975 = 0{,}025\ \%$ volt.

b) Tulajdonképpen felezési rétegvastagságot (D) kérdeznek, hiszen az intenzitás a felére csökken.

Releváns törvény:

$$\mu = \frac{ln2}{D}$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.13)*

- μ: lineáris gyengítési együttható $[cm^{-1}]$
- D: felezési rétegvastagság $[cm]$

Számolás:

$$\mu = \frac{ln2}{D}$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet, és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$D = \frac{ln2}{\mu} = \frac{ln2}{330} = 0{,}0021\,cm = 2{,}1\cdot 10^{-5}\,m = 0{,}021\,mm$$

Válasz:

a) 0,025 %-os energiaveszteséggel éri el a lézerfény a szemfeneket.

b) 0,02 mm vastag réteg csökkenti az intenzitást a felére.

16. példa

Egy konvex lencse elé, attól 12 cm-re egy tárgyat helyezünk el. A kép a lencse mögött 36 cm-re keletkezik. Mekkora a lencse fókusztávolsága, a dioptriában kifejezett törőereje, és mekkora a nagyítás?

Adatok:

- tárgytávolság: $t = 12\,cm$ *(szöveg)*
- képtávolság: $k = 36\,cm$ *(szöveg)*

Releváns törvények és számolás:

a) fókusztávolság

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)

- f: fókusztávolság $[cm]$
- t: tárgytávolság $[cm]$
- k: képtávolság $[cm]$

↓

$f = 9\,cm = 0{,}09\,m$

b) törőerő

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}09\,m} = 11{,}1\,dpt$$

/ felhasználjuk az előző pontban kiszámolt fókusztávolságot

- D: törőerő $[dpt]$
- f: fókusztávolság $[m]$

c) nagyítás

$$N = \frac{k}{t} = \frac{36}{12} = 3$$

(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)

- N: nagyítás
- k: képtávolság $[cm]$
- t: tárgytávolság $[cm]$

Válasz: A lencse fókusztávolsága 9 cm; dioptriában kifejezett törőereje 11,1 dpt és nagyítása 3.

17. példa

Mekkora a mikroszkóppal feloldható legkisebb távolság, ha az objektív nyílásszöge 140°, cédrusolaj immerziót (n = 1,5) használunk és a megvilágító fény sárgászöld (λ = 520 nm)?

Adatok:

- objektív nyílásszöge: $2\omega = 140^o$ *(szöveg)*
- cédrusolaj törésmutatója: $n = 1{,}5$ *(szöveg)*
- megvilágító fény hullámhossza: $\lambda = 520\,nm = 5{,}2\cdot 10^{-7}\,m$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

$$\delta = 0{,}61\cdot\frac{\lambda}{n\cdot\sin\omega}$$ *(Speciális mikroszkópok; VI.28 - 3)*

- δ: felbontási határ $[m]$
- λ: megvilágító fény hullámhossza $[m]$
- n: tárgy és az objektív közötti közeg törésmutatója $[\mathit{arányszám}]$
- ω: objektív félnyílásszöge $[\mathit{fok}]$

$$\omega = \frac{2\omega}{2}$$ *(logika)*

- ω: félnyílásszög $[\mathit{fok}]$
- 2ω: nyílásszög $[\mathit{fok}]$

Számolás:

$$\omega = \frac{2\omega}{2} = \frac{140^o}{2} = 70^o$$

$$\delta = 0{,}61\cdot\frac{\lambda}{n\cdot\sin\omega} = 0{,}61\cdot\frac{520\cdot 10^{-9}}{1{,}5\cdot\sin 70^o} = 2{,}25\cdot 10^{-7}\,m$$

Válasz: A mikroszkóppal feloldható legkisebb távolság $2{,}25\cdot 10^{-7}$ m.

18. példa

Számítsuk ki, hogy ha a refraktométer prizmái (törésmutató: 1,739) közé desztillált vizet (törésmutató: 1,333) cseppentünk,

a) mekkora lesz a határszög?

b) Hogyan változik meg a határszög értéke (a határvonal helyzete), ha desztillált víz helyett egészséges ember vérplazmáját (törésmutató: 1,3486) használjuk?

c) Hány százalékkal csökken a fény terjedési sebessége a prizmában a desztillált vízhez képest? Számítsuk ki a csökkenést levegő/prizma összeállításra is! (A levegő törésmutatóját vegyük 1-nek!)

Adatok:

- prizma törésmutatója: $n_{prizma} = 1{,}739$ *(szöveg)*
- desztillált víz törésmutatója: $n_{desztillált\ víz} = 1{,}333$ *(szöveg)*
- vérplazma törésmutatója: $n_{vérplazma} = 1{,}3486$ *(szöveg)*

a) Releváns törvény:

$$\frac{1}{\sin\beta_h} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$ *(Refraktométer; 5)*

↓

$$\sin\beta_h = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1{,}333}{1{,}739} = 0{,}76653 \quad \rightarrow \quad \beta_h = 50{,}0^o$$

b) Releváns törvény:

$$\sin\beta_h = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1{,}3486}{1{,}739} = 0{,}77550 \quad \rightarrow \quad \beta_h = 50{,}85^o$$ *(Refraktométer; 5)*

c) Releváns törvény:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.14)*

↓

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}739}{1{,}333} = 1{,}305 \quad \rightarrow \quad 100 - \frac{1{,}333}{1{,}739}\cdot 100 = 23{,}35\ \%$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}739}{1} = 1{,}739 \quad \rightarrow \quad 100 - \frac{1}{1{,}739}\cdot 100 = 42{,}50\ \%$$

Válasz:

a) A határszög 50,0°.

b) A határszög 50,85° lesz.

c) A prizmában a fény terjedési sebessége 23,35 %-kal csökken a desztillált vízhez képest. A prizmában a fény terjedési sebessége 42,50 %-kal csökken a levegőhöz képest.

19. példa

Mennyi energiát veszít sugárzás révén 1 óra alatt az az ember, akinek testfelülete 0,8 m², ha a környezet hőmérséklete 20 °C? A bőrfelület hőmérséklete 27 °C.

Adatok:

- idő: $t = 1\,h = 3600\,s$ *(szöveg)*
- bőrfelület hőmérséklete: $T_{bőrfelület} = 27\,^{o}C = 300\,K$ *(szöveg)*
- környezet hőmérséklete: $T_{környezet} = 20\,^{o}C = 293\,K$ *(szöveg)*
- testfelület: $A = 0{,}8\,m^2$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$$\Delta M = \sigma \cdot \left(T_{test}{}^4 - T_{környezet}{}^4\right)$$

(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.41)

- ΔM : kisugárzott felületi teljesítmény $\left[\frac{J}{m^2 \cdot s}\right]$
- σ : Stefan-Boltzmann-állandó $\left[\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{J}{m^2 \cdot K^4 \cdot s}\right]$
- T_{test} : test hőmérséklete $[K]$
- $T_{környezet}$: környezet hőmérséklete $[K]$

Számolás:

$$\Delta M = \sigma \cdot \left(T_{test}{}^4 - T_{környezet}{}^4\right) = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \left(300^4 - 293^4\right) = 41{,}61 \frac{J}{m^2 \cdot s}$$

ΔM egy intenzitás jellegű mennyiség (csak itt nem követeljük meg, hogy a sugárzás merőleges legyen a vizsgált felületre), vagyis egységnyi időre és felületre vonatkoztatott energiaváltozás.

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{t \cdot A}$$

↓

$$\Delta E = \Delta M \cdot t \cdot A = 41{,}61 \frac{J}{m^2 \cdot s} \cdot 0{,}8\,m^2 \cdot 3600\,s = 1{,}2 \cdot 10^5\,J = 120\,kJ$$

Válasz: 120 kJ energiát veszít sugárzás révén.

20. példa *Mekkora hőmérsékletű környezet sugározza vissza felét annak az energiának, amit 28 °C hőmérséklet mellett kisugárzunk?*

Adatok:

- test hőmérséklete: $T_{test} = 28\,^oC = 301\,K$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$M_{fekete}(T) = \sigma \cdot T^4$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.41)

- M_{fekete}: abszolút fekete test kisugárzott felületi teljesítménye
- σ: Stefan-Boltzmann-állandó $\left[\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \dfrac{J}{m^2 \cdot K^4 \cdot s}\right]$
- T: fekete test abszolút hőmérséklete $[K]$

Számolás:

„Abszolút” fekete test a valóságban nincsen, de jó közelítéssel érvényes marad a törvény. Ennek értelmében a test és a környezet kisugárzott felületi teljesítménye a következőképpen írható fel:

$$M_{test} = \sigma \cdot T_{test}{}^4$$

$$M_{környezet} = \sigma \cdot T_{környezet}{}^4$$

A szöveg alapján a következő összefüggést tudjuk ezen értékek között megállapítani:

$$\frac{1}{2} \cdot M_{test} = M_{környezet}$$

Szavakkal: A test által kisugárzott felületi teljesítmény fele megegyezik a környezet kisugárzott teljesítményével, tehát a környezet a kisugárzott energia felét sugározza vissza.

↓ */ felhasználva a fenti 2 egyenlőséget*

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\sigma \cdot T_{test}{}^4\right) = \sigma \cdot T_{környezet}{}^4$$

↓ */ osztunk σ-val és negyedik gyököt vonunk*

$$T_{környezet} = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot T_{test}{}^4}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2} \cdot 301^4} = 253\,K = -20\,^oC$$

Válasz: -20 °C hőmérsékletű környezet sugározza vissza a felét a kisugárzott energiának.

21. példa

Röntgencsőre adott 80 kV anódfeszültség és 6 mA erősségű anódáram mellett röntgensugárzás keletkezik.

a) Mekkora a röntgenfotonok maximális energiája?
b) Mekkora a minimális hullámhossz?
c) Mekkora a kisugárzott teljesítmény, ha az anód volfrám (Z=74)?
d) Mekkora a hatásfok?
e) Mennyi hő keletkezik percenként?
f) Mekkora sebességgel érik el az elektronok az anódot? (Tekintsünk el a relativisztikus tömegnövekedéstől!)
g) Hány elektron érkezik az anódra másodpercenként?

Adatok:

- anódfeszültség: $U_{anód} = 80\,kV = 8 \cdot 10^4\,V$ *(szöveg)*
- anódáram erőssége: $I_{anód} = 6\,mA = 6 \cdot 10^{-3}\,A$ *(szöveg)*
- volfrám rendszáma: $Z_V = 74$ *(szöveg)*
- átváltási arány: $1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J$ *(fej)*
- elektron tömege: $9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$ *(Állandók és adatok)*
- elektron töltése (elemi töltés): $1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Cb$ *(Állandók és adatok)*

a) A röntgencsőben gyorsított elektronokra fordítódó elektromos energia:

$$\varepsilon_{el} = U_{anód} \cdot q_{el}$$

Ez alakul át kinetikus (mozgási) energiává:

$$\varepsilon_{el} = \varepsilon_{kin} = \frac{m_{el} \cdot v_{el}^{\ 2}}{2}$$

Ha az elektron az anódba csapódva egyetlen lépésben veszti el energiáját, akkor a teljes kinetikus energia egyetlen foton formájában sugárzódik ki (ez a lehetséges maximális fotonenergia):

$$\varepsilon_{el} = \varepsilon_{kin} = \varepsilon_{foto(max)} = h \cdot \frac{c}{\lambda_{min}}$$

A maximális fotonenergia tehát megegyezik az egyetlen elektronra fordított elektromos munkával:

$$\varepsilon_{foto(max)} = \varepsilon_{kin} = \varepsilon_{el} = U_{anód} \cdot q_{el} = 8 \cdot 10^4\,V \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Cb = 1{,}28 \cdot 10^{-14}\,J$$

Mivel tudjuk az átváltási arányt, így a maximális fotonenergia eV-ban kifejezve:

$$\varepsilon_{foto(max)} = 1{,}28 \cdot 10^{-14}\,J = \frac{1{,}28 \cdot 10^{-14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 8 \cdot 10^4\,eV = 80\,keV$$

Válasz: A röntgenfotonok maximális energiája: $1{,}28 \cdot 10^{-14}\,J = 80\,keV$.

b) A hullámhossz a fotonenergiából számítható:

$$\varepsilon_{foto(max)} = h \cdot \frac{c}{\lambda_{min}}$$

↓

$$\lambda_{min} = h \cdot \frac{c}{\varepsilon_{foto(max)}} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\, \frac{m}{s}}{1{,}28 \cdot 10^{-14}\, J} = 1{,}55 \cdot 10^{-11}\, m = 15{,}5 \cdot 10^{-12}\, m = 15{,}5\; pm$$

Válasz: A minimális hullámhossz 15,5 pm.

c) $P_{Rtg} = c_{Rtg} \cdot U_{anód}{}^{2} \cdot Z \cdot I_{anód}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.82)*

- P_{Rtg}: a röntgencső kisugárzott (hasznos) teljesítménye
- c_{Rtg}: $1{,}1 \cdot 10^{-9}\, V^{-1}$ *(Állandók és adatok)*
- $U_{anód}$: anódfeszültség $[V]$
- Z: az anód anyagának rendszáma
- $I_{anód}$: anódáram erőssége $[A]$

↓

$$P_{Rtg} = c_{Rtg} \cdot U_{anód}{}^{2} \cdot Z \cdot I_{anód} = \left(1{,}1 \cdot 10^{-9}\, V^{-1}\right) \cdot \left(8 \cdot 10^{4}\, V\right)^{2} \cdot (74) \cdot \left(6 \cdot 10^{-3}\, A\right) = 3{,}126\, W$$

Válasz: A kisugárzott teljesítmény 3,126 W.

d) $P_{Rtg} = \eta \cdot U_{anód} \cdot I_{anód}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.82)*

- P_{Rtg}: a röntgencső kisugárzott (hasznos) teljesítménye $[W]$
- η: hatásfok $[arányszám]$
- $U_{anód}$: anódfeszültség $[V]$
- $I_{anód}$: anódáram erőssége $[A]$

↓

$$\eta = \frac{P_{Rtg}}{U_{anód} \cdot I_{anód}} = \frac{3{,}126\, W}{\left(8 \cdot 10^{4}\, V\right) \cdot \left(6 \cdot 10^{-3}\, A\right)} = 0{,}0065$$

↓

$$0{,}0065 \cdot 100\,\% = 0{,}65\,\%$$

Válasz: A hatásfok 0,65 %.

e) Az anódban lefékeződő elektronok energiája fotonenergiává (Rtg) vagy hővé alakul. A hatásfok (esetünkben 0,65 %) fejezi ki a hasznos, tehát fotonenergia (Rtg) arányát. A hatásfok és a Rtg-teljesítmény (korábban: kisugárzott teljesítmény) ismeretében kiszámolhatjuk az összteljesítményt:

$$P_{össz} \cdot \eta = P_{Rtg}$$

↓ / $:\eta$

$$P_{össz} = \frac{P_{Rtg}}{\eta} = \frac{3{,}126\,W}{0{,}0065} = 480{,}923\,W$$

Az összteljesítményből levonva a hasznos (Rtg) teljesítményt megkapjuk a hőteljesítményt, hiszen:

$$P_{össz} = P_{Rtg} + P_{hő}$$

↓

$$P_{hő} = P_{össz} - P_{Rtg} = 480{,}923\,W - 3{,}126\,W = 477{,}797\,W$$

Ennek, és az időnek $(1\,min = 60\,s)$ az ismeretében kiszámolható a hőenergia-változás:

$$\Delta Q = P_{hő} \cdot t = 477{,}797\,W \cdot 60\,s = 28.668\,J \simeq 28{,}7\,kJ$$

Válasz: 28,7 kJ hő keletkezik percenként.

f) Az elektronok kinetikus energiája megegyezik a gyorsításukra fordított elektromos munkával (lásd fentebb):

$$\varepsilon_{el} = \varepsilon_{kin} = 1{,}28 \cdot 10^{-14}\,J$$

A kinetikus energia képletéből meghatározható az elektronok sebessége:

$$\varepsilon_{kin} = E_{mozgási} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

$$E_{mozgási} = \frac{1}{2} \cdot m_{el} \cdot v_{el}{}^2$$

↓ / $\cdot 2$

$$2 \cdot E_{mozgási} = m_{el} \cdot v_{el}{}^2$$

↓ / $:m_{el}$

$$\frac{2 \cdot E_{mozgási}}{m_{el}} = v_{el}{}^2$$

↓ / $\sqrt{}$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot E_{mozgási}}{m_{el}}} = \sqrt{v_{el}{}^2} = v_{el}$$

↓ / *behelyettesítés*

$$v_{el} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{mozgási}}{m_{el}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1{,}28 \cdot 10^{-14}\,J)}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg}} = \sqrt{2{,}813 \cdot 10^{16}\,\frac{m^2}{s^2}} = 1{,}677 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

Válasz: Az elektronok $1{,}677 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$ -mal érik el az anódot.

g) Az anódáramból számítható ki a válasz. Az anódáram a másodpercenkénti töltésegységeket adja meg, tehát másodpercenként $6 \cdot 10^{-3}$ Cb töltés érkezik az anódra. Ezt kell elosztani 1 db elektron töltésével:

$$n_{el} = \frac{q}{q_{el}} = \frac{6 \cdot 10^{-3} Cb}{1{,}6 \cdot 10^{-19} Cb} = 3{,}75 \cdot 10^{16}$$

Válasz: Másodpercenként $3{,}75 \cdot 10^{16}$ db elektron érkezik az anódra.

22. példa *Mekkora a röntgensugarak intenzitása a röntgencső fókuszától 1 m távolságban, ha 50 kV anódfeszültség és mA anódáram mellett 0,37 %-os hatásfokkal keletkezik röntgensugárzás? Feltételezzük, hogy pontszerű fókuszból kiindulva 2π térszögben (félgömbben) egyenletesen oszlik el a sugárzás.*

<u>Adatok:</u>

- anódfeszültség: $U_{anód} = 50\,kV = 5 \cdot 10^4 V$ *(szöveg)*
- anódáram erőssége: $I_{anód} = 5\,mA = 5 \cdot 10^3 A$ *(szöveg)*
- hatásfok: $P = 0{,}37\% = 0{,}0037$ *(szöveg)*
- távolság: $r = 1\,m$ *(szöveg)*

<u>Releváns törvények:</u>

$P_{Rtg} = \eta \cdot U_{anód} \cdot I_{anód}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.82)*

- P_{Rtg}: a röntgencső kisugárzott (hasznos) teljesítménye $[W]$
- η: hatásfok $[arányszám]$
- $U_{anód}$: anódfeszültség $[V]$
- $I_{anód}$: anódáram erőssége $[A]$

$$I = \frac{P}{A}$$ *(fej)*

- I: intenzitás $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- P: teljesítmény $[W]$
- A: felület $[m^2]$

$$A_{gömb} = 4r^2\pi$$ *(matek)*

- $A_{gömb}$: gömb felszíne $[m^2]$
- r: a gömb sugara $[m]$
- π: pi (~3,14)

<u>Elmélet:</u>

Az intenzitás egyenlő az egységnyi felületre eső teljesítménnyel $(intenzitás = teljesítménysűrűség)$. Ennek megfelelően először meghatározzuk a teljesítményt, majd a felületet, végül kiszámoljuk a kettő hányadosát.

Számolás:

$$P_{Rtg} = \eta \cdot U_{anód} \cdot I_{anód} = 0{,}0037 \cdot \left(5 \cdot 10^{4}\,V\right) \cdot \left(5 \cdot 10^{-3}\,A\right) = 0{,}925\,W$$

Mivel a kisugárzott teljesítmény egy 1 m sugarú félgömb felszínén oszlik el, ennek felületét is meg kell határoznunk az intenzitás kiszámolásához.

A gömb felszíne: $A_{gömb} = 4 r^{2} \pi$

↓

A félgömb felszíne: $A_{félgömb} = 2 \cdot r^{2} \cdot \pi = 2 \cdot (1\mathrm{m})^{2} \cdot \pi = 6{,}283\,m^{2}$

↓ / *a fentiek alapján az intenzitás*

$$I = \frac{P}{A} = \frac{0{,}925\,W}{6{,}283\,m^{2}} = 0{,}147\,\frac{W}{m^{2}}$$

Válasz: A röntgensugarak intenzitása $0{,}147\,\frac{W}{m^{2}}$.

23. példa

Milyen vastag alumíniumlemez nyeli el a röntgensugárzás 90 %-át, ha az alumínium tömeggyengítési együtthatója 0,171 cm^2/g erre a sugárzásra nézve?

<u>Adatok:</u>

- alumínium tömeggyengítési együtthatója: $\mu_{m(Al)} = 0{,}171 \frac{cm^2}{g}$ *(szöveg)*
- alumínium sűrűsége: $\rho_{Al} = 2{,}7 \frac{g}{cm^3}$ *(Állandók és adatok)*
- 10 %-os transzmittivitás: $\frac{kilépő\ (gyengített)\ intenzitás}{belépő\ (gyengítetlen)\ intenzitás} = \frac{J}{J_0} = 0{,}1$

<u>Releváns törvények:</u>

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.11)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság $[cm]$
- μ: lineáris gyengítési együttható $[cm^{-1}]$

$\mu = \mu_m \cdot \rho$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.85)*

- μ: lineáris gyengítési együttható $[cm^{-1}]$
- μ_m: tömeggyengítési együttható $\left[\frac{cm^2}{g}\right]$
- ρ: sűrűség $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$

Számolás:

$$\mu = \mu_m \cdot \rho = 0{,}171\,\frac{cm^2}{g} \cdot 2{,}7\,\frac{g}{cm^3} = 0{,}4617\,cm^{-1}$$

adatok → $\frac{J}{J_0} = 0{,}1$ */ a lemez a sugárzás 90 %-át elnyeli, ergo a 10 %-át átengedi*

törvény → $\frac{J}{J_0} = e^{-\mu \cdot x}$

↓ */ az adatokból és a törvényből együtt következik, hogy:*

$$\frac{J}{J_0} = 0{,}1 = e^{-\mu \cdot x}$$

↓ */ logaritmizálás (természetes alappal)*

$$\ln(0{,}1) = -\mu \cdot x$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a μ-t*

$$x = \frac{\ln(0{,}1)}{-\mu} = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}4617} = 4{,}987 \simeq 5{,}0\,cm$$

Válasz: 5,0 cm vastag alumíniumlemez nyeli el a röntgensugárzás 90 %-át.

24. példa

Valamely gamma-sugárzás felezési rétegvastagsága ólomban 3 mm.

a) Milyen vastag ólomlemezzel lehetne a sugárzás intenzitását tizedrészére csökkenteni?

b) Mekkora az ólom gyengítési együtthatója az adott sugárzásra vonatkozólag?

Adatok:

- felezési rétegvastagság: $D = 3\,mm = 0{,}3\,cm$ *(szöveg)*

a) Releváns törvény:

$J = J_0 \cdot 2^{-\frac{x}{D}}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.12)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság $[cm]$
- D: felezési rétegvastagság $[cm]$

adatok → $\frac{J}{J_0} = 0{,}1$ és törvény → $\frac{J}{J_0} = 2^{-\frac{x}{D}}$

↓

$$\frac{J}{J_0} = 0{,}1 = 2^{-\frac{x}{D}} = 2^{-\frac{x}{0{,}3}}$$

↓ */ logaritmizálás (lg) emlékeztető matekból:* $\log_a(x)^k = k \cdot \log_a(x)$

$$\log_{10} 0{,}1 = \frac{-x}{D} \cdot \log_{10} 2$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük D értékét*

$$x = -1 \cdot \frac{D \cdot \log_{10} 0{,}1}{\log_{10} 2} = -1 \cdot \frac{0{,}3 \cdot \log_{10} 0{,}1}{\log_{10} 2} = 0{,}997 \simeq 1\,cm$$

b) Releváns törvény:

$\mu = \frac{ln2}{D} = \frac{ln2}{0{,}3} \simeq 2{,}31\,cm^{-1}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.13)*

- μ: lineáris gyengítési együttható $[cm^{-1}]$
- D: felezési rétegvastagság $[cm]$

Válasz:

a) 1 cm vastag ólomlemezzel lehetne a sugárzás intenzitását tizedrészére csökkenteni.

b) 2,31 cm^{-1} az ólom gyengítési együtthatója az adott sugárzásra vonatkozólag.

25. példa

A felezési réteg hányszorosa gyengíti a sugárzás intenzitását 95 %-kal?

Adatok:

- $95\ \% - os\ abszorbancia \rightarrow 5\ \% - os\ transzmittivitás$ *(szöveg)*

$\downarrow$

$$\frac{kilépő\ (gyengített)\ intenzitás}{belépő\ (gyengítetlen)\ intenzitás} = \frac{J}{J_0} = 0{,}05$$

Releváns törvény:

$$J = J_0 \cdot 2^{-\frac{x}{D}}$$

(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.12)

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- D: felezési rétegvastagság

Számolás:

adatok$\rightarrow$ $\frac{J}{J_0} = 0{,}05$

törvény $\frac{J}{J_0} = 2^{-\frac{x}{D}}$

$\downarrow$

$$\frac{J}{J_0} = 0{,}05 = 2^{-\frac{x}{D}}$$

$\downarrow$ */ logaritmizálás (lg)* *emlékeztető matekból:* $\log_a(x)^k = k \cdot \log_a(x)$

$$\log_{10} 0{,}05 = \frac{-x}{D} \cdot \log_{10} 2$$

$\downarrow$ */ átrendezzük az egyenletet*

$$x = -1 \cdot \frac{\log_{10} 0{,}05 \cdot D}{\log_{10} 2} \simeq 4{,}32\, D$$

Válasz: A felezési réteg 4,32-szerese gyengíti a sugárzás intenzitását 95 %-kal.

26. példa

Hány százalékra gyengíti a sugárzás intenzitását a 3,33-szoros felező réteg?

Adatok:

- rétegvastagság: $x = 3{,}33\,D$ *(szöveg)*

Kérdés:

$$\frac{J}{J_0} \cdot 100\,\% = ?$$

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás

↑
Ez nem más, mint a transzmittivitás formulája. Ennek konkrét értékére vonatkozik a kérdés.

Releváns törvény:

$$J = J_0 \cdot 2^{-\frac{x}{D}}$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.12)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- D: felezési rétegvastagság

Számolás:

$$J = J_0 \cdot 2^{-\frac{x}{D}}$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a D függvényében kifejezett x-et*

$$\frac{J}{J_0} = 2^{-\frac{x}{D}} = 2^{-\frac{3{,}33\,D}{D}} = 2^{-3{,}33} = 0{,}1$$

↓ */ átváltjuk százalékba az arányt*

$$\frac{J}{J_0} \cdot 100\,\% = 0{,}1 \cdot 100\,\% = 10\,\%$$

Válasz: 10 %-ra gyengíti a sugárzás intenzitását.

$(10\ \% - os\ transzmittivitás = 90\ \% - os\ abszorbancia)$

27. példa *Valamely bétasugárzás intenzitását egy alumínium-lemez 29,2 %-kal csökkenti. Hányszoros rétegben alkalmazott lemez esetén nyerjük a felezési réteget?*

Adatok:

- $29{,}2\ \% - os\, abszorbancia$ ➔ $70{,}8\ \% - os\, transzmittivitás$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$J = J_0 \cdot 2^{-\frac{x}{D}}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.12)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- D: felezési rétegvastagság

Számolás:

adatok→ $\frac{J}{J_0} = 0{,}708$ és törvény→ $\frac{J}{J_0} = 2^{-\frac{x}{D}}$

↓

$$\frac{J}{J_0} = 0{,}708 = 2^{-\frac{x}{D}}$$

↓ / *logaritmizálás (lg)* *emlékeztető matekból:* $\log_a(x)^k = k \cdot \log_a(x)$

$$\log_{10} 0{,}708 = -\frac{x}{D} \cdot \log_{10} 2$$

↓

$$D = \frac{\log_{10} 2\ \cdot\ -x}{\log_{10} 0{,}708} = 2{,}007\, x \simeq 2\mathrm{x}$$

Válasz: Kétszeres rétegben alkalmazott lemez esetén nyerjük a felezési réteget.

28. példa

Egy 0,66 MeV energiájú γ-foton Compton-effektusban adja le energiáját egy anyaggal való kölcsönhatásában. A kilépési munka 50 eV. Mekkora a szórt foton energiája és hullámhossza, ha a kilépő elektron sebessége 6·10^7 m/s és a relativisztikus tömegnövekedéstől eltekintünk?

Adatok:

- fotonenergia: $E_{foton} = 0{,}66\,MeV = 660.000\,eV$ *(szöveg)*
- kilépési munka: $W_{ki} = 50\,eV$ *(szöveg)*
- Planck-állandó: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$ *(Állandók és adatok)*
- elektron sebessége: $c = 6 \cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}$ *(szöveg)*
- elektron tömege: $m_{e^-} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$ *(Állandók és adatok)*
- átváltási arány: $1\;eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J$ *(fej)*

Releváns törvények:

$h \cdot f = E_{kötési} + h \cdot f' + E_{mozgási}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.89)*

- h: Planck-állandó
- f: γ-foton frekvenciája
- $E_{kötési}$: kötési energia (értékre megegyezik a kilépési munkával)
- f': szórt foton frekvenciája
- $E_{mozgási}$: mozgási energiája

$E_{mozgási} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

- $E_{mozgási}$: mozgási energia
- m: mozgó test tömege
- v: mozgó test tömege

$c = \lambda \cdot f$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.26)*

- c: hullám sebessége
- λ: hullámhossz
- f: frekvencia

Számolás:

a)

$$h\cdot f = E_{kötési} + h\cdot f' + E_{mozgási}$$

↓

$$h\cdot f - E_{kötési} - E_{mozgási} = h\cdot f'$$

↓

$$h\cdot f' = h\cdot f - E_{kötési} - E_{mozgási}$$

- $h\cdot f$: megadták a feladat szövegében (660.000 eV)
- $E_{kötési} = W_{ki}$ megadták a feladat szövegében (50 eV)
- $E_{mozgási}$: ki tudjuk számolni

$$E_{mozgási} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\right)\cdot\left(6\cdot 10^7\,\frac{m}{s}\right)^2 = 1{,}638\cdot 10^{-15}\,J$$

↓ */ átváltjuk eV-ra*

$$E_{mozgási} = \frac{1{,}638\cdot 10^{-15}\,J}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,J} = 10.237{,}5\,eV$$

Mind az eV (elekronvolt), mind a J (joule) az energiát jellemző mértékegység. Egyik sem jobb, vagy rosszabb a másiknál, de fontos, hogy egy feladaton belül egységesen ugyanazt alkalmazzuk! Mivel a háromból két adat már meg volt adva eV-ban, így a harmadikat is ebbe érdemes átváltani.

Visszatérünk az eredeti egyenletünkhöz, és behelyettesítjük a már meglévő adatokat:

$$h\cdot f' = h\cdot f - E_{kötési} - E_{mozgási} = 660.000\,eV - 50\,eV - 10.237{,}5\,eV = 649.712{,}5\,eV \simeq 649{,}7\,keV$$

b) Ennyi a szórt foton energiája. Hullámhosszának meghatározásához első lépésben frekvenciát számítunk. Ehhez célszerű (a Planck-állandó dimenziója miatt) átváltanunk a kapott értéket J-ra.

$$h\cdot f' = 649{,}7\,keV \simeq 1{,}04\cdot 10^{-13}\,J$$

↓

$$f' = \frac{1{,}04\cdot 10^{-13}\,J}{h} = \frac{1{,}04\cdot 10^{-13}\,J}{6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s} = 1{,}58\cdot 10^{-20}\,\frac{1}{s} = 1{,}58\cdot 10^{-20}\,Hz$$

Második lépésben a szórt foton frekvenciájából kiszámoljuk annak hullámhosszát is.

$$c = \lambda\cdot f$$

↓

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{1{,}58\cdot 10^{-20}\,\frac{1}{s}} \simeq 1{,}90\cdot 10^{-12}\,m = 1{,}90\,pm$$

Válasz: A szórt foton energiája 649,7 keV, hullámhossza 1,90 pm.

30. példa *Kedden és csütörtökön reggel 8:00-kor 5-5 páciens vizsgálatához fejenként 2 MBq ^{24}Na izotópra van szükségünk. Mekkora aktivitású ^{24}Na-nak kell érkeznie, ha az izotópszállítmányt hétfőn 16:00-kor vesszük át?*

<u>Adatok:</u>

- ^{24}Na felezési ideje: $T = 15{,}02\,óra$ (A fontosabb radioaktív izotópok jell. adatai)
- csökkent aktivitás: $\Lambda = 5\,MBq$ *(szöveg)*

<u>Releváns törvények:</u>

$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.101)

- Λ: csökkent aktivitás
- Λ_0: eredeti aktivitás
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- λ: bomlási állandó
- t: idő

$\lambda \cdot T = ln2$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.98)

- λ: bomlási állandó
- T: felezési idő

<u>Számolás:</u>

A könnyebb átláthatóság kedvéért először elméletben egyszerűsítjük a példát úgy, mintha csak egy pácienst kellene megvizsgálni ^{24}Na izotóppal a megadott időpontokban. Az így kapott számot a végén majd megszorozzuk 5-tel, hogy a feltett kérdésre válaszoljunk.

hétfő, 16:00 – kedd, 08:00 összesen: 16 óra
hétfő, 16:00 – csütörtök, 08:00 összesen: 64 óra

Kiszámoljuk a ^{24}Na bomlási állandóját:

$$\lambda \cdot T = ln2$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet*

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

↓ */ behelyettesítjük az adatokat*

$$\lambda_{Na} = \frac{\ln 2}{15{,}02\,óra} \approx 0{,}046148\ óra^{-1}$$

Ezúttal az eredeti aktivitásra vagyunk kíváncsiak (erre irányul a kérdés).

$$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

↓ */ ezért átrendezzük az egyenletet*

$$\Lambda_0 = \frac{\Lambda}{e^{-\lambda \cdot t}}$$

Az így kapott formába már külön-külön be tudjuk helyettesíteni a két időtartamot:

keddig kitartó eredeti aktivitás: $\Lambda_0 = \frac{\Lambda}{e^{-\lambda \cdot t}} = \frac{2\,MBq}{e^{-0{,}046148\ óra^{-1} \cdot 16\,óra}} = 4{,}1850\,MBq$

csütörtökig kitartó eredeti aktivitás: $\Lambda_0 = \frac{\Lambda}{e^{-\lambda \cdot t}} = \frac{2\,MBq}{e^{-0{,}046148\ óra^{-1} \cdot 64\,óra}} = 38{,}345\,MBq$

Az elején tett egyszerűsítésünket most „kompenzáljuk” (hiszen az eredeti kérdés 5 páciensre vonatkozik):

$$5 \cdot (kedd + csütörtök) = 5 \cdot (4{,}1850 + 38{,}345) = 212{,}65\,MBq \approx 0{,}213\,Gbq$$

Válasz: 0,213 GBq aktivitású ^{24}Na-nak kell érkeznie.

31. példa

Egy radioaktív készítményben kétféle izotóp van jelen. Megfigyelésünk kezdetén a két izotóp azonos aktivitású volt. Az egyik felezési ideje 15 óra, a másiké 2,5 nap. Mi lesz a két izotóp aktivitásának relatív eloszlása 3 nap, illetve 10 nap múlva?

Adatok:

- A izotóp felezési ideje: $T_A = 15\ \acute{o}ra$ *(szöveg)*
- B izotóp felezési ideje: $T_B = 2{,}5\ nap = 2{,}5 \cdot 24\ \frac{\acute{o}ra}{nap} = 60\ \acute{o}ra$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.101)*

- Λ: csökkent aktivitás
- Λ_0: eredeti aktivitás
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- λ: bomlási állandó
- t: idő

$\lambda \cdot T = \ln 2$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.98)*

- λ: bomlási állandó
- T: felezési idő

Számolás:

$\lambda \cdot T = \ln 2$

↓ */ átrendezzük az egyenletet*

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

a) 3 nap múlva

$$3\,nap = 3 \cdot 24\ \frac{\acute{o}ra}{nap} = 72\ \acute{o}ra$$

A izotóp

$$\lambda_A = \frac{\ln 2}{T_A} = \frac{\ln 2}{15\,\acute{o}ra} = 0{,}046210\ \acute{o}ra^{-1}$$

A kezdeti aktivitást (Λ_0) egynek (egység; tulajdonképpen teljesen mindegy (ha végig következetesek vagyunk), hiszen relatív arányokat vizsgálunk a példában) vesszük. Az aktivitásnak ugyanezen ok miatt nem adunk mértékegységet.

$$\Lambda_{3nap} = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda_A \cdot t} = 1 \cdot e^{-0{,}046210\,\acute{o}ra^{-1} \cdot 72\,\acute{o}ra} = 0{,}035897$$

B izotóp

$$\lambda_B = \frac{\ln 2}{T_B} = \frac{\ln 2}{60\,\acute{o}ra} = 0{,}011552\ \acute{o}ra^{-1}$$

$$\Lambda_{3nap} = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda_A \cdot t} = 1 \cdot e^{-0{,}011552\,\acute{o}ra^{-1} \cdot 72\,\acute{o}ra} = 0{,}43528$$

$0{,}035897 : 0{,}43528$

↓ / *mindkét számot megszorozzuk a kisebb szám reciprokával*

$1 : 12{,}1$

b) 10 nap múlva

az a) pont analógiájára

$$10\,nap = 10 \cdot 24\ \frac{óra}{nap} = 240\ óra$$

A bomlási állandó értelemszerűen mindkét izotópnál ugyanannyi, mint az előző részfeladatban, így:

A izotóp 10 nap múlva: $\Lambda_{10\,nap} = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda_A \cdot t} = 1 \cdot e^{-0{,}046210\,óra^{-1} \cdot 240\,óra} = 1{,}52581 \cdot 10^{-5}$

B izotóp 10 nap múlva: $\Lambda_{10\,nap} = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda_B \cdot t} = 1 \cdot e^{-0{,}011552\,óra^{-1} \cdot 240\,óra} = 0{,}062507$

$1{,}52581 \cdot 10^{-5} : 0{,}062507$

↓ / *mindkét számot megszorozzuk a kisebb szám reciprokával*

$1 : 4097$

Válasz: A két izotóp egymáshoz viszonyított (relatív) aktivitása 3 nap múlva 1 : 12,1 ; 10 nap múlva 1 : 4097.

32. példa

2 MBq ^{32}P preparátum aktivitása mennyi idő alatt csökken 0,1 kBq-re?

Adatok:

- ^{32}P felezési ideje: $T = 14{,}28\,nap$ *(A fontosabb radioaktív izotópok jellemző adatai)*
- eredeti aktivitás: $\Lambda_0 = 2\,MBq = 2 \cdot 10^6\,Bq$ *(szöveg)*
- csökkent aktivitás: $\Lambda = 0{,}1\,kBq = 1 \cdot 10^2\,Bq$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő" anyaggal; II.101)*

- Λ: csökkent aktivitás
- Λ_0: eredeti aktivitás
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- λ: bomlási állandó
- t: idő

$\lambda \cdot T = \ln 2$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő" anyaggal; II.98)*

- λ: bomlási állandó
- T: felezési idő

Számolás:

$\lambda \cdot T = \ln 2$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük T-t*

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{14{,}28\,nap} = 0{,}04854\,nap^{-1}$$

$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

↓ */ :Λ₀*

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = e^{-\lambda \cdot t}$$

↓ */ ln*

$$\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right) = -\lambda \cdot t$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$t = \frac{\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)}{-\lambda} = \frac{\ln\left(\frac{1 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6}\right)}{-0{,}04854} = 204\,nap$$

Válasz: 204 nap alatt csökken 0,1 kBq-re.

33. példa

30 órával ezelőtt érkezett 0,5 GBq ^{24}Na-izotóp. Most kimérünk belőle 50 MBq mennyiséget. Az érkezéstől számított, mennyi idő múlva lesz a maradék aktivitása 50 MBq?

Adatok:

- ^{24}Na felezési ideje: $T = 15{,}02\,óra$ (A fontosabb radioaktív izotópok jell. adatai)
- eredeti aktivitás: $\Lambda_0 = 0{,}5\,GBq = 5 \cdot 10^8\,Bq$
- eddig eltelt idő: $t_1 = 30\,óra$
- kimérendő mennyiség: $50\,MBq = 5 \cdot 10^7\,Bq$

Releváns törvények:

$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.101)

- Λ: csökkent aktivitás
- Λ_0: eredeti aktivitás
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- λ: bomlási állandó
- t: idő

$\lambda \cdot T = ln2$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.98)

- λ: bomlási állandó
- T: felezési idő

Számolás, elmélet:

A 0. órában $5 \cdot 10^8$ Bq (Λ_0) aktivitású izotópunk van. Ebből a 30. órára maradó mennyiség (Λ_{30h}) a bomlástörvénnyel (1. törvény) kiszámolható. Igen ám, csakhogy a képlettárban nem a bomlási állandó (λ), hanem a felezési idő (T) szerepel. Szerencsére a kettő között egyértelműen definiálható a matematikai összefüggés (2. törvény), így a felezési időből egyszerűen kiszámolhatjuk a bomlási állandót:

$\lambda \cdot T = ln2$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\lambda = \frac{ln2}{T} = \frac{ln2}{15{,}02\,h} = 0{,}046148\,h^{-1}$$

A bomlási állandó ismeretében már ki tudjuk számolni a 30. órára maradó mennyiséget is:

$$\Lambda_{30h} = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_1} = 5 \cdot 10^8 \cdot e^{-0{,}046148 \cdot 30} = 1{,}2523 \cdot 10^8\, Bq$$

Ebből mérjük ki az 50 MBq-t:

$$\Lambda_{maradék} = 1{,}2523 \cdot 10^8\, Bq - 5 \cdot 10^7\, Bq = 12{,}523 \cdot 10^7\, Bq - 5 \cdot 10^7\, Bq = 7{,}523 \cdot 10^7\, Bq$$

Ez, a maradék ($7{,}523 \cdot 10^7$ Bq) bomlik tovább. Azt, hogy ennek az aktivitása mikor csökken 50 MBq-re ($\Lambda_{vég}$) szintén a bomlástörvényből számoljuk ki, csak ez esetben az időváltozás (t_2) a keresett ismeretlen:

$$\Lambda_{vég} = \Lambda_{maradék} \cdot e^{-\lambda \cdot t_2}$$

↓ * / átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$t_2 = \frac{\ln\left(\frac{\Lambda_{vég}}{\Lambda_{maradék}}\right)}{-\lambda} = \frac{\ln\left(\frac{5 \cdot 10^7}{7{,}523 \cdot 10^7}\right)}{-0{,}046148} = 8{,}8525\, h$$

A példa az érkezéstől számított időre kérdez rá, ami a két idő összege:

$$\Sigma t = t_1 + t_2 = 30\, h + 8{,}8525\, h = 38{,}8525\, h$$

<u>Válasz:</u> Az érkezéstől számított 38,8525 h múlva lesz a maradék aktivitása 50 MBq.

34. példa *Mekkora aktivitású az 1 μg tömegű hordozómentes ^{131}I?*

Adatok:

- ^{131}I felezési ideje: $T = 8{,}04\,nap$ (A fontosabb radioaktív izotópok jell. adatai)
- tömeg: $m = 1\mu g = 10^{-6}\,g$ (szöveg)
- ^{131}I moláris tömege: $M = 131\,\frac{g}{mol}$

Releváns törvények:

A bomlástörvény differenciális alakja:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda \cdot N$$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.95)

- ΔN : a Δt idő alatt bekövetkezett bomlások száma
- λ: bomlási állandó
- N : az elbomlatlan atommagok száma

Az aktivitás definíciója:

$$\Lambda = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal, II.99)

- Λ : aktivitás
- ΔN : a Δt idő alatt bekövetkezett bomlások száma

A bomlási állandó és a felezési idő közötti kapcsolat:

$$\lambda \cdot T = ln2$$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.98)

- λ: bomlási állandó
- T : felezési idő

Számolás:

Az első két képlet alapján

↓

$$\Lambda = \lambda \cdot N$$

A bomlástörvény mindkét oldalát megszorozzuk -1-gyel, majd összehasonlítjuk az aktivitás definíciójával.

Elsőként számoljuk ki az izotópban lévő atomok számát:

$$N = \frac{m}{M} \cdot N_A = \frac{10^{-6}\,g}{131\,\frac{g}{mol}} \cdot 6 \cdot 10^{23}\,mol^{-1} = 4{,}58 \cdot 10^{15}$$

A bomlási állandót a fizikai felezési időből tudjuk kiszámolni. Mivel az aktivitás a másodpercenkénti bomlások száma, a fizikai felezési időt *(T)* is másodpercben kell kifejeznünk:

$$T = 8{,}04\,nap \simeq 6{,}947 \cdot 10^5\,s$$

$$\lambda \cdot T = ln2$$

↓

$$\lambda = \frac{ln2}{T} = \frac{ln2}{6{,}947 \cdot 10^5\,s} = 9{,}978 \cdot 10^{-7}\,s^{-1}$$

Behelyettesítünk az eredeti képletbe:

$$\Lambda = \lambda \cdot N = 9{,}978 \cdot 10^{-7}\,s^{-1} \cdot 4{,}58 \cdot 10^{15} = 4{,}57 \cdot 10^9\,Bq = 4{,}57\,GBq$$

<u>Válasz:</u> 4,57 GBq aktivitású.

35. példa

Hány mól radioaktív jódvegyület van a 0,5 MBq aktivitású ^{131}I készítményben?

Adatok:

- ^{131}I felezési ideje: $T = 8{,}04\,nap$ *(A fontosabb radioaktív izotópok jell. adatai)*
- készítmény aktivitása: $\Lambda = 0{,}5\,MBq = 5\cdot 10^{5}\,Bq$ *(szöveg)*
- ^{131}I moláris tömege: $M = 131\,\frac{g}{mol}$

Releváns törvények:

A bomlástörvény differenciális alakja:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda\cdot N$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.95)*

- ΔN: a Δt idő alatt bekövetkezett bomlások száma
- λ: bomlási állandó
- N: az elbomlatlan atommagok száma

Az aktivitás definíciója:

$$\Lambda = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal, II.99)*

- Λ: aktivitás
- ΔN: a Δt idő alatt bekövetkezett bomlások száma

A bomlási állandó és a felezési idő közötti kapcsolat:

$$\lambda\cdot T = ln2$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.98)*

- λ: bomlási állandó
- T: felezési idő

Számolás:

Az első két képlet alapján

A bomlástörvény mindkét oldalát megszorozzuk -1-gyel, majd összehasonlítjuk az aktivitás definíciójával.

↓

$$\Lambda = \lambda\cdot N$$

↓

$$N = \frac{\Lambda}{\lambda}$$

A bomlási állandó a fizikai felezési időből számítható ki. Mivel az aktivitás a másodpercenkénti bomlások száma, a fizikai felezési időt *(T)* is másodpercben kell kifejeznünk:

$$T = 8{,}04\, nap \simeq 6{,}947 \cdot 10^5\, s$$

$$\lambda \cdot T = ln2$$

↓

$$\lambda = \frac{ln2}{T} = \frac{ln2}{6{,}947 \cdot 10^5\, s} = 9{,}978 \cdot 10^{-7}\, s^{-1}$$

Behelyettesítünk az elbomlatlan atommagok számát megadó képletbe:

$$N = \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{5 \cdot 10^5\, Bq}{9{,}978 \cdot 10^{-7}\, s^{-1}} = 5{,}01 \cdot 10^{11}$$

Váltsuk át az így megkapott számot mólokba:

$$\frac{5{,}01 \cdot 10^{11}}{N_A} = \frac{5{,}01 \cdot 10^{11}}{6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}} = 8{,}35 \cdot 10^{-13}\, mol$$

Válasz: $8{,}35 \cdot 10^{-13}$ mól radioaktív jódvegyület van a készítményben.

36. példa

Hány radioaktív jódatom van 2,4 MBq aktivitású ^{131}I készítményben?

Adatok:

- ^{131}I felezési ideje: $T = 8{,}04\,nap$ *(A fontosabb radioaktív izotópok jell. adatai)*
- készítmény aktivitása: $\Lambda = 2{,}4\,MBq = 2{,}4 \cdot 10^6\,Bq$ *(szöveg)*
- ^{131}I moláris tömege: $M = 131\,\frac{g}{mol}$

Releváns törvények:

A bomlástörvény differenciális alakja:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda \cdot N$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.95)*

- ΔN : a Δt idő alatt bekövetkezett bomlások száma
- λ : bomlási állandó
- N : az elbomlatlan atommagok száma

Az aktivitás definíciója:

$$\Lambda = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal, II.99)*

- Λ : aktivitás
- ΔN : a Δt idő alatt bekövetkezett bomlások száma

A bomlási állandó és a felezési idő közötti kapcsolat:

$$\lambda \cdot T = ln2$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.98)*

- λ : bomlási állandó
- T : felezési idő

Számolás:

Az első két képlet alapján

A bomlástörvény mindkét oldalát megszorozzuk -1-gyel, majd összehasonlítjuk az aktivitás definíciójával.

↓

$$\Lambda = \lambda \cdot N$$

↓

$$N = \frac{\Lambda}{\lambda}$$

A bomlási állandó a fizikai felezési időből számítható ki. Mivel az aktivitás a másodpercenkénti bomlások száma, a fizikai felezési időt *(T)* is másodpercben kell kifejeznünk:

$$T = 8{,}04\,nap \simeq 6{,}947 \cdot 10^5\,s$$

$$\lambda \cdot T = ln2$$

↓

$$\lambda = \frac{ln2}{T} = \frac{ln2}{6{,}947 \cdot 10^5\,s} = 9{,}978 \cdot 10^{-7}\,s^{-1}$$

Helyettesítsük be a képletbe a kiszámolt bomlási állandót *(λ)*:

$$N = \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{2{,}4 \cdot 10^6\,Bq}{9{,}978 \cdot 10^{-7}\,s^{-1}} = 2{,}4 \cdot 10^{12}$$

<u>Válasz:</u> $2{,}4 \cdot 10^{12}$ db radioaktív jódatom van a készítményben.

37. példa

Mekkora a kén biológiai felezési ideje a bőrben, ha a vizsgálat kezdetén a bőr 1 grammjában 6 kBq, 2 hét múlva pedig 3,45 kBq ^{35}S-t találtunk?

Adatok:

- ^{35}S fizikai felezési ideje: $T_{fiz} = 87{,}2\,d$ (A fontosabb radioaktív izotópok jell. adatai)
- eredeti aktivitás: $\Lambda_0 = 6\frac{kBq}{g}$ (szöveg)
- csökkent aktivitás: $\Lambda = 3{,}45\frac{kBq}{g}$ (szöveg)
- idő: $t = 2\,hét = 14\,d$ (szöveg)

Releváns törvények:

$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.101)

- Λ: csökkent aktivitás
- Λ_0: eredeti aktivitás
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- λ: bomlási állandó
- t: idő

$\lambda \cdot T = ln2$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.98)

- λ: bomlási állandó
- T: felezési idő

$\frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{T_{fiz}} + \frac{1}{T_{biol}}$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő anyaggal; II.98)

- T_{eff}: effektív felezési idő
- T_{fiz}: fizikai felezési idő
- T_{biol}: biológiai felezési idő

Számolás, elmélet:

Az aktivitás csökkenése a biológiai és a fizikai bomlás együttes eredménye, melyet effektív bomlásnak nevezünk. Az effektív bomlási állandó meghatározásához alakítsuk át az egyenletet, majd helyettesítsünk be a bomlástörvénybe:

$$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

↓

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = e^{-\lambda \cdot t}$$

↓

$$\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right) = \ln\left(e^{-\lambda \cdot t}\right) = -\lambda \cdot t$$

↓

$$\lambda_{eff} = \frac{\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)}{-t} = \frac{\ln\left(\frac{3{,}45\frac{kBq}{g}}{6\frac{kBq}{g}}\right)}{-14\,d} = \frac{-0{,}5534}{-14\,d} = 0{,}03953\,d^{-1}$$

Az effektív bomlási állandóból már ki tudjuk számítani az effektív felezési időt:

$$\lambda \cdot T = ln2$$

↓

$$T_{eff} = \frac{ln2}{\lambda_{eff}} = \frac{ln2}{0{,}03953\,d^{-1}} = 17{,}536\,d$$

Az effektív (tényleges) felezési idő reciproka egyenlő a fizikai és a biológiai felezési idő reciprokösszegével:

$$\frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{T_{fiz}} + \frac{1}{T_{biol}}$$

↓ $\qquad / \ -\frac{1}{T_{fiz}}$

$$\frac{1}{T_{eff}} - \frac{1}{T_{fiz}} = \frac{1}{T_{biol}}$$

↓ *\/ közös nevezőre hozzuk az egyenlet bal oldalát*

$$\frac{1}{T_{biol}} = \frac{T_{fiz} - T_{eff}}{T_{fiz} \cdot T_{eff}}$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$T_{biol} = \frac{T_{fiz} \cdot T_{eff}}{T_{fiz} - T_{eff}} = \frac{17{,}536 \cdot 87{,}2}{87{,}2 - 17{,}536} = 21{,}95\,d$$

Válasz: A kén biológiai felezési ideje a bőrben 21,95 nap.

39. példa

5 MBq aktivitású α-sugárzó izotópunk van. Az α-részecskék energiája 6,2 MeV. A teljes energiát 0,1 kg vízben nyeletjük el. Hány fokkal emelkedik a víz hőmérséklete ½ óráig tartó besugárzás alatt. (A fizikai bomláscsökkenéstől eltekintünk.)

Adatok:

- izotóp aktivitása: $\Lambda = 5\,MBq = 5 \cdot 10^6\,Bq$ *(szöveg)*
- α-részecskék energiája:

  $$\varepsilon_\alpha = 6{,}2\,MeV = 6{,}2 \cdot 10^6\,eV = 6{,}2 \cdot 10^6\,eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\frac{J}{eV} = 9{,}92 \cdot 10^{-13}\,J$$ *(szöveg)*
- tömeg: $m = 0{,}1\,kg$ *(szöveg)*
- idő: $t = 0{,}5\,h = 30\,min = 1800\,s$ *(szöveg)*
- víz fajlagos hőkapacitása: $c_{víz} = 4{,}18\frac{kJ}{kg \cdot K} = 4180\frac{J}{kg \cdot K}$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvények:

$P = \Lambda \cdot \varepsilon$

- P: teljesítmény
- Λ: aktivitás
- ε: kisugárzott részecske energiája

$\Delta E = P \cdot t$

- ΔE: energiakülönbség
- P: teljesítmény
- t: idő

$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

- Q: hőmennyiség
- c: fajlagos hőkapacitás
- m: tömeg
- T: hőmérséklet

Számolás:

Az izotóppreparátum minden másodpercben $5 \cdot 10^6$ darab α-részecskét bocsát ki, egyenként $9{,}92 \cdot 10^{-13}$ J energiával, így az emittált teljesítmény:

$$P = 5 \cdot 10^6\frac{1}{s} \cdot 9{,}92 \cdot 10^{-13}\,J = 4{,}96 \cdot 10^{-6}\frac{J}{s}$$

A fél óra alatt emittált teljes energia:

$$\Delta E = P \cdot t = 4{,}96 \cdot 10^{-6}\frac{J}{s} \cdot 1800\,s = 8{,}928 \cdot 10^{-3}\,J$$

Ez az energia alakul hővé az elnyelődés során. A hőmérsékletváltozást a fajhő segítségével tudjuk meghatározni:

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

↓

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c \cdot m} = \frac{8{,}928 \cdot 10^{-3}\, J}{4180 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 0{,}1\, kg} = 2{,}14 \cdot 10^{-5}\, K$$

$$2{,}14 \cdot 10^{-5} K = 2{,}14 \cdot 10^{-5}\ {}^{o}C$$

<u>Válasz:</u> $2{,}14 \cdot 10^{-5}$ ºC-kal emelkedik a víz hőmérséklete.

43. példa *Egy 70 kg-os strandolónak 0,4 m² nagyságú bőrfelülete percenként, négyzetcentiméterenként átlagosan 4,2 J-nyi energiát nyel el a napsugárzásból. Mennyi idő alatt nyel el annyi energiát, amennyi gamma-sugárzás esetén halálos dózist (6 Gy-t) jelentene?*

<u>Adatok:</u>

- tömeg: $m = 70\,kg$ *(szöveg)*
- bőrfelület: $A_{bőr} = 0{,}4\,m^2 = 4000\,cm^2$ *(szöveg)*
- energiaelnyelés mértéke: $4{,}2\,\frac{J}{cm^2 \cdot min}$ *(szöveg)*

<u>Számolás:</u>

Először azt számoljuk ki, hogy a teljes test mennyi energiát nyel el 1 perc alatt:

$$\Delta E = 4{,}2\,\frac{J}{cm^2} \cdot 4000\,cm^2 = 16.800\,J = 1{,}68 \cdot 10^4\,J$$

A második lépés, hogy az elnyelt energiából elnyelt dózist számítunk. Ennek jele: D Úgy számoljuk ki, hogy az élő anyagban elnyelt sugárzási energiát elosztjuk az anyag tömegével: $D = \frac{E}{m}$. Egysége $\frac{J}{kg}$, melynek neve gray, jele: Gy.

$$D = \frac{E}{m} = \frac{1{,}68 \cdot 10^4\,J}{70\,kg} = 240\,\frac{J}{kg} = 240\,Gy$$

A harmadik lépésben az elnyelt dózist (melyet 1 percre számoltunk ki az imént) másodpercre vonatkoztatjuk:

$$dózisteljesítmény = \frac{D}{\Delta t} = \frac{240\,Gy}{min} = \frac{240\,Gy}{60\,s} = 4\,\frac{Gy}{s}$$

Ebből már egy egyszerű számítással megkaphatjuk a választ a kérdésünkre. Ha 1 s alatt 4 Gy-nyi dózist kap a test, akkor 6 Gy-nyi dózist mennyi idő alatt kap?

$$\frac{6\,Gy}{4\,\frac{Gy}{s}} = 1{,}5\,s$$

Ennyi idő alatt kap tehát 6 Gy-nyi dózist a test (ami a halálos=letális dózis lenne gamma-sugárzás esetén). Még szerencse, hogy a feladat szövegében napsugárzás szerepelt. 1,5 s-nyi napozás nem szokott különösebben megártani. Ennyi idő alatt még egy kicsit sem tud lebarnulni az ember. Pedig mennyi szoláriumban elpazarolt órát lehetne így megspórolni! ☺

<u>Válasz:</u> 1,5 s alatt nyel el annyi energiát.

44. példa

Az ember számára az ún. halálos dózis értéke egész test besugárzás esetén 6 Gy. Hány fokkal „melegszik fel” a szervezet ekkora dózis közvetlen hatására? (A test fajlagos hőkapacitását vegyük $4\frac{kJ}{kg\cdot K}$ *-nek.)*

Adatok:

- dózis: $D = 6\,Gy = 6\frac{J}{kg}$ *(szöveg)*
- a test fajlagos hőkapacitása: $c = 4\frac{kJ}{kg\cdot K} = 4000\frac{J}{kg\cdot K}$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta m}$$ (Dozimetria; 1)

- D: dóziskonstans $\left[\frac{J}{kg}\right]$
- ΔE: elnyelt (sugárzási) energia $[J]$
- m: tömeg $[kg]$

$$\Delta Q = c\cdot m\cdot\Delta T$$ (A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)

- Q hőmennyiség $[J]$
- c: fajlagos hőkapacitás (fajhő) $\left[\frac{J}{kg\cdot K}\right]$
- m: tömeg $[kg]$
- T: hőmérséklet $[K]$

Számolás, elmélet:

Az elnyelt dózis egységnyi tömegben elnyelt (sugárzási) energia. Ez a sugárzási energia az elnyelődés során (több lépésben) hővé alakul, így az elnyelt dózist tekinthetjük egységnyi tömegben a besugárzás által létrehozott hőváltozásnak is:

$$D = \frac{\Delta Q}{m}$$

A hő az energia egyik formája, így nincs ellentmondás a következő egyenletben: $D = \frac{\Delta E}{\Delta m} = \frac{\Delta Q}{m}$.

A hőmérsékletváltozást a fajhő segítségével lehet kiszámolni:

$$\Delta Q = c\cdot m\cdot\Delta T$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c\cdot m} = \frac{D}{c} = \frac{6\frac{J}{kg}}{4000\frac{J}{kg\cdot K}} = 1{,}5\cdot 10^{-3}\,K$$

$$1{,}5\cdot 10^{-3}\,K = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ \ {}^{o}C$$

Az érték alapján megállapítható, hogy a hőmérséklet-változás elhanyagolható. A példa rávilágít arra a tényre, hogy a letális (halálos) dózisú ionizáló besugárzás nem az elnyelt energia mennyisége, hanem az elnyelés módja és a kölcsönhatások következményei miatt halálos.

Válasz: A szervezet $1{,}5\cdot 10^{-3}$ ºC-kal „melegszik fel" ekkora dózis közvetlen hatására.

45. példa *Mekkora a 0,6 GBq ^{24}Na izotóp környezetében 30 cm levegő távolságban várható dózisteljesítmény?*

Adatok:

- aktivitás: $\Lambda = 0{,}6\,GBq$ *(szöveg)*
- ^{24}Na K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 444\ \dfrac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}$ *(táblázat)*
- távolság: $r = 30\,cm = 0{,}3\,m$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda\cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- $D_{levegő}$: dózisteljesítmény $[\mu Gy]$
- K_γ: dózisállandó $\left[\dfrac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}\right]$
- Λ: aktivitás $[GBq]$
- t: idő $[h]$
- r: távolság $[m]$

Számolás:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda\cdot t}{r^2} = 444\cdot\frac{0{,}6\cdot 1}{0{,}3^2} = 2960\,\mu Gy = 2{,}96\,mGy$$

Válasz: 2,96 mGy_{lev}/h a várható dózisteljesítmény.

47. példa

20 MBq aktivitású ^{24}Na izotóppal dolgozunk. 40 cm távolságra van tőlünk a preparátum. Milyen vastag ólomabszorbenst kell alkalmaznunk, hogy a dózisteljesítmény ne legyen több, mint 20 µGy$_{lev}$/h?

Adatok:

- ^{24}Na K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 444\ \frac{\mu Gy_{lev} \cdot m^2}{GBq \cdot h}$ *(táblázat)*
- távolság: $r = 40\,cm = 0{,}4\,m$ *(szöveg)*
- tömeggyengítési együttható: $\mu_m\left({}^{24}Na\text{ , ólom abszorbens}\right) = 5 \cdot 10^{-2}\ \frac{cm^2}{g}$ *(táblázat)*
- ólom sűrűsége: $\rho_{Pb} = 11{,}3\,\frac{g}{cm^3}$ *(Állandók és adatok)*
- aktivitás: $\Lambda = 20\,MBq = 0{,}02\,GBq$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- $D_{levegő}$: dózisteljesítmény $[\mu Gy]$
- K_γ: dózisállandó $\left[\frac{\mu Gy_{lev} \cdot m^2}{GBq \cdot h}\right]$
- Λ: aktivitás $[GBq]$
- t: idő $[h]$
- r: távolság $[m]$

$$D = D_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

- D: csökkent dózisteljesítmény
- D_0: kezdeti dózisteljesítmény
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- μ: lineáris gyengítési együttható $\left[cm^{-1}\right]$
- x: rétegvastagság $[cm]$

$$\mu = \mu_m \cdot \rho$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.85)*

- μ: lineáris gyengítési együttható $\left[cm^{-1}\right]$
- μ_m: tömeggyengítési együttható $\left[\frac{cm^2}{g}\right]$
- ρ: sűrűség $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$

Számolás:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2} = 444 \cdot \frac{0{,}02 \cdot 1}{0{,}4^2} = 55{,}5\,\mu Gy$$

$$\mu = \mu_m \cdot \rho = 5 \cdot 10^{-2}\frac{cm^2}{g} \cdot 11{,}3\frac{g}{cm^3} = 0{,}565\,cm^{-1}$$

$$D = D_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$x = \frac{\ln\left(\frac{D}{D_0}\right)}{-\mu} = \frac{\ln\left(\frac{20}{55{,}5}\right)}{-0{,}565} = 1{,}806 \simeq 1{,}8\,cm$$

Válasz: 1,8 cm vastag ólomabszorbenst kell alkalmaznunk.

48. példa *Mekkora távolságot kell tartanunk 0,56 GBq ^{131}I izotóp környezetében, hogy 20 $\mu Gy_{lev}/h$ dózisteljesítményt ne lépjünk túl?*

Adatok:

- aktivitás: $\Lambda = 0{,}56\,GBq$ *(szöveg)*
- dózisteljesítmény: $D = 20\,\mu Gy_{lev}/h$ *(szöveg)*
- ^{131}I K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 54\,\frac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}$ *(táblázat)*

Releváns törvény:

$$D_{leveg\H{o}} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- D: dózisteljesítmény $[\mu Gy]$
- K_γ: dózisállandó $\left[\frac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}\right]$
- Λ: aktivitás $[GBq]$
- t: idő $[h]$
- r: távolság (forrás-detektor) $[m]$

Számolás:

$$D_{leveg\H{o}} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$r = \sqrt{\frac{K_\gamma \cdot \Lambda \cdot t}{D}} = \sqrt{\frac{54 \cdot 0{,}56 \cdot 1}{20}} \simeq 1{,}230\,m = 123\,cm$$

Válasz: 123 cm távolságot kell tartanunk.

49. példa

0,5 GBq ^{24}Na izotópot 2 cm vastag ólomfal mögé tettünk. Mekkora a dózisteljesítmény az ólomfal másik oldalán, az izotóptól mért 30 cm távolságban?

Adatok:

- aktivitás: $\Lambda = 0{,}5\,GBq$ *(szöveg)*
- ^{24}Na K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 444\,\dfrac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}$ *(táblázat)*
- tömeggyengítési együttható: $\mu_m\left({}^{24}Na\,,\,ólom\,abszorbens\right) = 5\cdot 10^{-2}\,\dfrac{cm^2}{g}$ *(táblázat)*
- forrás-detektor távolság: $r = 30\,cm = 0{,}3\,m$ *(szöveg)*
- ólom sűrűsége: $\rho_{Pb} = 11{,}3\,\dfrac{g}{cm^3}$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvények:

$$D_{levegő} = K_\gamma\cdot\frac{\Lambda\cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- D: dózisteljesítmény $[\mu Gy]$
- K_γ: dózisállandó $\left[\dfrac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}\right]$
- Λ: aktivitás $[GBq]$
- t: idő $[h]$
- r: távolság (forrás-detektor) $[m]$

$$\mu = \mu_m\cdot\rho$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.85)*

- μ: lineáris gyengítési együttható $\left[cm^{-1}\right]$
- μ_m: tömeggyengítési együttható $\left[\dfrac{cm^2}{g}\right]$
- ρ: sűrűség $\left[\dfrac{g}{cm^3}\right]$

$$D = D_0\cdot e^{-\mu\cdot x}$$

- D: csökkent dózisteljesítményt
- D_0: kezdeti dózisteljesítmény
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- μ: lineáris gyengítési együttható $\left[cm^{-1}\right]$
- x: rétegvastagság $[cm]$

Számolás:

$$D_{levegő} = K_{\gamma} \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2} = 444 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 1}{0{,}3^2} = 2466{,}7\,\mu Gy$$

$$\mu = \mu_m \cdot \rho = 5 \cdot 10^{-2}\,\frac{cm^2}{g} \cdot 11{,}3\,\frac{g}{cm^3} = 0{,}565\,cm^{-1}$$

$$D = D_0 \cdot e^{-\mu \cdot x} = 2466{,}7\,\mu Gy \cdot e^{-0{,}565 \cdot 2} = 2466{,}7\,\mu Gy \cdot e^{-1{,}13} = 796{,}8\,\frac{\mu Gy_{lev}}{h} \simeq 0{,}8\,\frac{mGy_{lev}}{h}$$

Válasz: $0{,}8\,\frac{mGy_{lev}}{h}$ a dózisteljesítmény az ólomfal másik oldalán.

50. példa

Mennyi ideig tartózkodhatunk 0,75 GBq ^{59}Fe preparátumtól 30 cm távolságban, hogy ne lépjük túl a maximálisan megengedett heti dózist, azaz 1 mSv-et?

Adatok:

- aktivitás: $\Lambda = 0{,}75\,GBq$ *(szöveg)*
- ^{59}Fe K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 160\ \frac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}$ *(táblázat)*
- dózis: $1\,mSv = 1\,mGy = 1000\,\mu Gy$ *(szöveg)*
- forrás-detektor távolság: $r = 30\,cm = 0{,}3\,m$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- D: dózisteljesítmény $[\mu Gy]$
- K_γ: dózisállandó $\left[\frac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}\right]$
- Λ: aktivitás $[GBq]$
- t: idő $[h]$
- r: távolság (forrás-detektor) $[m]$

Számolás:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$

↓

$$t = \frac{D\cdot r^2}{K_\gamma \cdot \Lambda} = \frac{1000\cdot 0{,}3^2}{160\cdot 0{,}75} = 0{,}75\,h = 0{,}75\,h\cdot 60\frac{min}{h} = 45\,min$$

Válasz: 45 percig tartózkodhatunk a preparátumtól 30 cm távolságban.

51. példa

75 MBq ^{24}Na izotóptól 30 cm távolságban dolgozunk. Milyen vastag ólomfalat kell alkalmaznunk, hogy helyünkön 15 μGy$_{lev}$/h értékre csökkenjen a dózisteljesítmény?

Adatok:

- csökkent dózisteljesítmény: $D = 15\,\mu Gy_{lev}/h$ *(szöveg)*
- aktivitás: $\Lambda = 75\,MBq = 0{,}075\,GBq$ *(szöveg)*
- forrás-detektor távolság: $r = 30\,cm = 0{,}3\,m$ *(szöveg)*
- ^{24}Na K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 444\,\dfrac{\mu\,Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}$ *(táblázat)*
- ólom sűrűsége: $\rho_{Pb} = 11{,}3\,\dfrac{g}{cm^3}$ *(táblázat)*
- tömeggyengítési együttható: $\mu_m\left(^{24}Na\,,\acute{o}lom\,abszorbens\right) = 5\cdot 10^{-2}\,\dfrac{cm^2}{g}$ *(táblázat)*

Releváns törvények:

$$D_{levegő} = K_\gamma\cdot\frac{\Lambda\cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- D: dózisteljesítmény
- K_γ: dózisállandó
- Λ: aktivitás
- t:
- r: távolság (forrás-detektor)

$$\mu = \mu_m\cdot\rho$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.85)*

- μ: lineáris gyengítési együttható $\left[cm^{-1}\right]$
- μ_m: tömeggyengítési együttható $\left[\dfrac{cm^2}{g}\right]$
- ρ: sűrűség $\left[\dfrac{g}{cm^3}\right]$

$$D = D_0\cdot e^{-\mu\cdot x}$$

- D: csökkent dózisteljesítmény
- D_0: kezdeti dózisteljesítmény
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- μ: lineáris gyengítési együttható $\left[cm^{-1}\right]$
- x: rétegvastagság $\left[cm\right]$

Számolás:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2} = 444 \cdot \frac{0{,}075 \cdot 1}{0{,}3^2} = 370 \mu Gy$$

$$\mu = \mu_m \cdot \rho = 5 \cdot 10^{-2} \frac{cm^2}{g} \cdot 11{,}3 \frac{g}{cm^3} = 0{,}565\, cm^{-1}$$

$$D = D_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

↓

$$x = \frac{\ln\left(\frac{D}{D_0}\right)}{-\mu} = \frac{\ln\left(\frac{15}{370}\right)}{-0{,}565} = 5{,}67\, cm$$

Válasz: 5,67 cm vastag ólomfalat kell alkalmaznunk.

54. példa

a) Mekkora sebességű az 5 kV feszültséggel felgyorsított elektron? b) Milyen hullámhosszúságú anyaghullám tartozik hozzá? c) Hány százaléka a hullámhossz a hidrogénatom átmérőjének? (A számolásnál tekintsünk el a relativisztikus tömegnövekedéstől.)

Adatok:

- gyorsítófeszültség: $U_{gyorsító} = 5\,kV = 5 \cdot 10^3\,V$ *(szöveg)*
- elektron töltése: $q_{e^-} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$ *(Állandók és adatok)*
- elektron tömege: $m_{e^-} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$ *(Állandók és adatok)*
- Planck-állandó: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$ *(Állandók és adatok)*

a) Releváns törvények:

$$E_{mozgási} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

- $E_{mozgási}$: mozgási (kinetikus) energia
- m: tömeg
- v: sebesség $\left[\frac{m}{s}\right]$

$$E_{mozgási} = q \cdot U$$

- $E_{mozgási}$: mozgási (kinetikus) energia
- q: a gyorsított részecske töltése
- U: gyorsítófeszültség $[V]$

Számolás:

Először egyesítjük a két egyenletet, majd a kérdéses mennyiségre (sebességre) rendezzük. Végül behelyettesítjük a már ismert adatokat.

$$E_{mozgási} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot U$$

↓

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}} = 4{,}19 \cdot 10^7 \frac{m}{s} \approx 4{,}2 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$$

Válasz: $4{,}2 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$ sebességű az elektron.

b) Releváns törvény:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

(I. Az „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.3)

- λ: a de Broglie-féle anyaghullám hullámhossza $[m]$
- h: Planck-állandó
- p: lendület (impulzus)
- m: tömeg $[kg]$
- v: sebesség $\left[\frac{m}{s}\right]$

Számolás:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} J \cdot s}{(9{,}1 \cdot 10^{-31} kg) \cdot \left(4{,}2 \cdot 10^{7} \frac{m}{s}\right)} = 1{,}73 \cdot 10^{-11} m = 17{,}3 \cdot 10^{-12} m = 17{,}3\, pm$$

Válasz: 17,3 pm hullámhosszúságú anyaghullám tartozik hozzá.

c) A hidrogénatom átmérője egy tized nanométer $\left(\frac{10^{-9} m}{10} = 10^{-10} m = 1\, Angström\right)$, így a keresett százalék:

$$\frac{1{,}73 \cdot 10^{-11} m}{10^{-10} m} \cdot 100\,\% = 17{,}3\,\%$$

Válasz: 17,3 %-a a hullámhossz a hidrogénatom átmérőjének.

55. példa

Egy elektronmikroszkóp 5 keV-os elektronokkal dolgozik. Mekkora a feloldóképessége, ha az elektronobjektív nyílásszöge 6°?

Adatok:

- gyorsítófeszültség: $U = 5\,keV = 5 \cdot 10^3\,V$ *(szöveg)*
- elektron töltése: $q_q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Cb$ *(Állandók és adatok)*
- elektron tömege: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$ *(Állandók és adatok)*
- Planck-állandó: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$ *(Állandók és adatok)*
- $\textit{nyílásszög}: 2\omega = 6^o$ → $\textit{félnyílásszög}: \omega = 3^o$
- törésmutató: $n = 1$
  (Az elektronmikroszkópban vákuum van, az elektron anyaghullámának törésmutatója 1)

Releváns törvények:

$$\varepsilon_{el} = q \cdot U$$

- ε_{el}: elektromos munka
- q: a gyorsított részecske töltése
- U: gyorsítófeszültség $[V]$

$$\varepsilon_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

- ε_{kin}: mozgási (kinetikus) energia
- m: tömeg
- v: sebesség

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

(I. Az „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.3)

- λ: a de Broglie-féle anyaghullám hullámhossza $[m]$
- h: Planck-állandó
- p: lendület (impulzus)
- m: tömeg
- v: sebesség

$$\delta = 0{,}61 \cdot \frac{\lambda}{n \cdot \sin \omega}$$ (Speciális mikroszkópok; VI.28 - 3)

- δ: felbontási határ
- λ: hullámhossz $[m]$
- n: törésmutató
- ω: félnyílásszög

$$f = \frac{1}{\delta}$$

- f: feloldóképesség (felbontóképesség)
- δ: felbontási határ

Számolás:

Az 5 keV-os elektron azt jelenti, hogy az elektronokat 5 keV gyorsítja. Az elektromos térben való gyorsítás során az elektromos munka (ε_{el}) mozgási (kinetikus, ε_{kin}) energiává alakul:

$\varepsilon_{el} \rightarrow \varepsilon_{kin}$

$$q \cdot U = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

↓ $/ \cdot 2 \cdot m$

$$2 \cdot m \cdot q \cdot U = m^2 \cdot v^2$$

↓ $/ \sqrt{}$

$$\sqrt{2 \cdot m \cdot q \cdot U} = m \cdot v = p$$

A fenti összefüggések használatával a részecske lendületét (a kinetikus, illetve elektromos energia és a tömeg ismeretében) a sebesség kiszámolása nélkül is kifejezhetjük. Ezt helyettesítjük be az anyaghullámot megadó képletbe:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot q \cdot U}} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{3}}} = 1{,}73 \cdot 10^{-11}\, m = 17{,}3\, pm$$

↓

$$\delta = 0{,}61 \cdot \frac{\lambda}{n \cdot \sin \omega} = 0{,}61 \cdot \frac{1{,}73 \cdot 10^{-11}}{1 \cdot \sin 3^{o}} = 2{,}0164 \cdot 10^{-10}\, m \approx 0{,}2\, nm$$

↓

$$f = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{0{,}2\, nm} = 5\, nm^{-1}$$

Válasz: Az elektronmikroszkóp feloldóképessége 5 nm^{-1}.

56. példa

A szív percenként 5,6 l vért pumpál az 1 cm sugarú aortába. Mekkora a vér átlagos áramlási sebessége az aortában?

Adatok:

- idő: $\Delta t = 1\,min = 60\,s$ *(szöveg)*
- térfogat: $\Delta V = 5{,}6\,l = 5{,}6\,dm^3 = 5{,}6\cdot 10^{-3} m^3$ *(szöveg)*
- sugár: $r = 1\,cm = 0{,}01\,m$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$ *(III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.1)*

- I_V: térfogati áramerősség $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
- ΔV: térfogat $\left[m^3\right]$
- Δt: idő $[s]$

$$I_V = A\cdot\bar{v} = \acute{a}lland\acute{o}$$ *(III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.4)*

- I_V: térfogati áramerősség $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
- A: cső (ér) keresztmetszete $\left[m^2\right]$
- $\bar{v}$: átlagsebesség $\left[\frac{m}{s}\right]$

$$A = r^2\cdot\pi$$ *(matek)*

- A: kör területe $\left[m^2\right]$
- r: kör sugara $[m]$
- π: pi (~3,14)

Számolás:

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{5{,}6\cdot 10^{-3} m^3}{60\,s} = 9{,}33\cdot 10^{-5}\,\frac{m^3}{s}$$

$$A = r^2\cdot\pi = (0{,}01\,m)^2\cdot\pi = 3{,}14\cdot 10^{-4}\,m^2$$

$$I_V = A\cdot\bar{v} = \acute{a}lland\acute{o}$$

$\downarrow$ $/ :A$

$$\bar{v} = \frac{I_V}{A} = \frac{9{,}33\cdot 10^{-5}\frac{m^3}{s}}{3{,}14\cdot 10^{-4} m^2} = 0{,}297\,\frac{m}{s} \approx 30\,\frac{cm}{s}$$

Válasz: A vér átlagos áramlási sebessége $30\,\frac{cm}{s}$ az aortában.

57. példa

Egy vértranszfúzió alkalmával a vért tartalmazó palackot 1,3 m-re a tű felett helyezik el. A tű belső átmérője 0,36 mm, hossza 3 cm. Egy perc alatt 4,5 cm^3 vér folyik át a tűn. Számítsuk ki a vér viszkozitását!

Adatok:

- palack magassága (a tűhöz képest): $\Delta h = 1{,}3\, m$ *(szöveg)*
- kapilláris sugara: $R = \frac{0{,}36}{2} mm = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\, m$ *(szöveg)*
- kapilláris hossza: $l = 3\, cm = 3 \cdot 10^{-2}\, m$ *(szöveg)*
- átfolyó térfogat: $4{,}5\, cm^3 = 4{,}5 \cdot 10^{-6}\, m^3$ *(szöveg)*
- idő: $t = 1\, perc = 60\, s$ *(szöveg)*
- vér sűrűsége: $\rho_{vér(átlagos)} = 1{,}05 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvények:

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\pi}{8\eta} \cdot R^4 \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l}$$ *(Áramlás; III.12 – 3)*

- I_V: térfogati áramerősség $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
- V: térfogat $\left[m^3\right]$
- t: idő $[s]$
- π: pi $(\approx 3{,}14)$
- η: folyadék viszkozitása $[mPa \cdot s]$
- R: kapilláris sugara $[m]$
- p: nyomás $[Pa]$
- l: kapilláris hossza $[m]$

$$\Delta p = \Delta p_{hidrosztatikai} = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

- Δp: hidrosztatikai nyomáskülönbség $[Pa]$
- ρ: sűrűség $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
- g: nehézségi gyorsulás $\left(\approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}\right)$
- Δh: magasságkülönbség $[m]$

<u>Számolás:</u>

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\pi}{8\,\eta}\cdot R^4\cdot\frac{\Delta p}{\Delta l}$$

↓

$$\eta = \frac{\frac{-\pi}{8}\cdot R^4\cdot\frac{\Delta p}{\Delta l}}{I_V}$$

$$\Delta p = \Delta p_{hidrosztatikai} = \rho\cdot g\cdot\Delta h = 1{,}05\cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}3\,m = 13.390{,}65\,Pa \qquad \left(Pa = \frac{kg}{m\cdot s^2}\right)$$

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{4{,}5\cdot 10^{-6}\,m^3}{60\,s} = 7{,}5\cdot 10^{-8}\,\frac{m^3}{s}$$

↓

$$\eta = \frac{\frac{-\pi}{8}\cdot R^4\cdot\frac{\Delta p}{\Delta l}}{I_V} = \frac{\frac{-3{,}14}{8}\cdot\left(1{,}8\cdot 10^{-4}\right)^4\cdot\frac{13.390{,}65}{3\cdot 10^{-2}}}{7{,}5\cdot 10^{-8}} = -2{,}452\cdot 10^{-3}\,Pa\cdot s \approx -2{,}5\,mPa\cdot s$$

<u>Válasz:</u> A vér viszkozitása 2,5 mPa·s.

59. példa

4 mm belső átmérőjű artériában a vér áramlási sebessége a kritikus sebesség fele. Az artéria egy szakaszán a belső átmérő felére csökken. Stacionárius áramlást tételezve fel, mekkorák az átlagos áramlási sebességek és a kritikus sebességek a különböző keresztmetszeteknél?

Adatok:

- átmérő: $d_1 = 4\,mm$ → sugár: $r_1 = \frac{d_1}{2} = 2\,mm$ *(szöveg)*
- a vér áramlási sebessége: $\overline{v_1} = \frac{v_{krit1}}{2}$ *(szöveg)*
- lecsökkent átmérő: $d_2 = 2\,mm$ → lecsökkent sugár: $r_2 = 1\,mm$ *(szöveg)*
- Reynolds-szám (sima falú csövekre): $R_e = 1160$ *(táblázat)*
- a vér viszkozitása (37 °C-on): $\eta = 4{,}5\,mPa\cdot s = 4{,}5\cdot 10^{-3}\,Pa\cdot s$ *(táblázat)*
- a vér sűrűsége: $\rho_{vér} = 1{,}05\cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}$ *(táblázat)*

Kérdések:

- $\overline{v_1} = ?$
- $\overline{v_2} = ?$
- $v_{krit1} = ?$
- $v_{krit2} = ?$

Releváns törvények:

$v_{krit} = R_e \cdot \frac{\eta}{\rho\cdot r}$ (III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.17)

- v_{krit}: kritikus sebesség
- R_e: Reynolds-szám
- η: viszkozitás
- ρ: sűrűség
- r: sugár

$I_V = A\cdot\bar{v} = állandó$ (III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.4)

- I_V: térfogati áramerősség
- A: cső (ér) keresztmetszete
- $\bar{v}$: átlagsebesség

Számolás:

$$v_{krit1} = R_e \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot r} = 1160 \cdot \frac{4{,}5}{(1{,}05 \cdot 10^3) \cdot (2)} = 2{,}486 \frac{m}{s}$$

↓

$$\overline{v_1} = \frac{v_{krit1}}{2} = \frac{2{,}486}{2} = 1{,}243 \frac{m}{s}$$

$$v_{krit2} = 1160 \cdot \frac{4{,}5}{(1{,}05 \cdot 10^3) \cdot (1)} = 4{,}971 \frac{m}{s}$$

Mivel $I_V = A \cdot \overline{v} = \acute{a}lland\acute{o}$, ezért ha a keresztmetszet az egy negyedére csökken, a sebesség a négyszeresére nő.

↓

$\overline{v_2} = 4\overline{v_1} = 4 \cdot 1{,}243 = 4{,}972 \frac{m}{s}$ (magyarázat: Ha az átmérő ($\rightarrow$sugár is) felére csökken, akkor a keresztmetszet az egy negyedére, hiszen $T_{kör} = r^2 \cdot \pi$. Ebből következik, hogy ezen a helyen a vér áramlási sebességének a négyszeresére kell nőnie, mert a vér nem „torlódhat fel” sehol.)

Válasz: a, d = 4 mm: A vér átlagos áramlási sebessége 1,243 $\frac{m}{s}$, a kritikus sebesség 2,486 $\frac{m}{s}$.

b, d = 2 mm: A vér átlagos áramlási sebessége 4,972 $\frac{m}{s}$, a kritikus sebesség 4,971 $\frac{m}{s}$.

Mivel $\overline{v_2} > v_{krit2}$, ezért lecsökkent átmérő mellett az áramlás turbulens lesz.

61. példa

Egy 9 mm belső átmérőjű artériát vizsgálunk Doppler-ultrahang módszerrel. A kibocsátott ultrahang frekvenciája 8 MHz. A vizsgáló személy által hallott hang átlagos frekvenciája 1200 Hz. Mekkora a vér átlagos sebessége az artériában? Az ultrahang sebessége a testben 1500 m/s, és feltételezzük, hogy az az ér tengelyével párhuzamosan halad.

Adatok:

- ultrahang frekvenciája: $f_{UH} = 8\,MHz = 8 \cdot 10^6\,Hz$ *(szöveg)*
- ultrahang sebessége: $c_{UH} = 1500\,\frac{m}{s}$ *(szöveg)*
- Doppler-frekvencia: $f_D = 1200\,Hz$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$$f_D = \frac{2\,\upsilon}{c} \cdot f$$

(VIII. Képalkotó módszerek; VIII.5)

- f_D: Doppler-frekvencia $\left[Hz = \frac{1}{s}\right]$
- υ: a vér sebessége $\left[\frac{m}{s}\right]$
- c: az ultrahang (UH) sebessége $\left[\frac{m}{s}\right]$
- f: az ultrahang (UH) frekvenciája $\left[Hz = \frac{1}{s}\right]$

Számolás:

$$f_D = \frac{2\,\upsilon}{c} \cdot f$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\upsilon = \frac{\frac{f_D \cdot c}{f}}{2} = \frac{\frac{1200\,Hz \cdot 1500\,\frac{m}{s}}{8 \cdot 10^6\,Hz}}{2} = 0{,}1125\,\frac{m}{s} = 11{,}25\,\frac{cm}{s}$$

Válasz: A vér átlagos sebessége az artériában $11{,}25\,\frac{cm}{s}$.

62. példa

Mennyivel változik meg egy mól normál állapotú oxigéngáz belső energiája, ha
a) hőmérséklete állandó térfogaton 25 °C-kal nő,
b) hőmérséklete állandó nyomáson 25 °C-kal nő?

Adatok:

- anyagmennyiség: $n = 1\,mol$ *(szöveg)*
- moláris tömeg: $M_{O_2} = 32\frac{g}{mol}$ *(Állandók és adatok)*
- hőmérsékletkülönbség: $\Delta T = 25^{o}C = 25\,K$ *(szöveg)*
- állandó térfogaton mért fajhő: $c_v = 0{,}65\frac{kJ}{kg\cdot K} = 650\frac{J}{kg\cdot K}$ *(Állandók és adatok)*
- állandó nyomáson mért fajhő: $c_p = 0{,}92\frac{kJ}{kg\cdot K} = 920\frac{J}{kg\cdot K}$ *(Állandók és adatok)*
- egyetemes gázállandó: $R = 8{,}31\frac{J}{mol\cdot K}$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvények:

$\Delta E = Q_E + W$ *(III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.56)*

- ΔE: belső energia megváltozása $[J]$
- Q: hő $[J]$
- W: munka $[J]$

$Q_E = c\cdot m\cdot \Delta T$ *(III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.56)*

- Q_E: hőmennyiség $[J]$
- c: fajlagos hőkapacitás $\left[\frac{J}{kg\cdot K}\right]$
- m: tömeg $[kg]$
- T: hőmérséklet $[K]$

$W_V = -p\cdot \Delta V$ *(III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.58)*

- W_V: térfogati munka $[J]$
- p: nyomás $[Pa]$
- ΔV: térfogatváltozás $[m^3]$

$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ *(Egyesített gáztörvény)*

- p: nyomás $[Pa]$
- V: térfogat $[m^3]$
- n: anyagmennyiség $[mol]$
- R: egyetemes gázállandó
- T: hőmérséklet $[K]$

a) izochor folyamat

Egy rendszer belső energiája azáltal változik meg, hogy hőt vesz fel, vagy hőt ad le, valamint a rendszeren munkát végzünk, vagy a rendszer végez munkát.

$$\Delta E = Q_E + W$$

- $Q_E = c \cdot m \cdot \Delta T$
- $W_V = -p \cdot \Delta V$

Mivel a gáz térfogata példánkban nem változik meg (állandó), így izochor folyamatról beszélünk. Logikus, hogy így ez a tag (W) kiesik, hiszen a rendszer nem végez térfogati munkát $(\Delta V = 0)$. Ergo a rendszer belső energiájának megváltozása kizárólag a hőcserének köszönhető.

$$\Delta E = Q_E = c_v \cdot m \cdot \Delta T$$

- c_v: állandó térfogaton mért fajhő
- $m = n \cdot M = 1 mol \cdot 32 \frac{g}{mol} = 32 g = 0{,}032 kg$

  m: tömeg $[g]$

  n: anyagmennyiség $[mol]$

  M: moláris tömeg $\left[\frac{g}{mol}\right]$

$$\Delta E = c_v \cdot m \cdot \Delta T = 650 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 0{,}032 kg \cdot 25 K = 520 J$$

Válasz: 520 J-lal változik meg (nő) a belső energiája az oxigéngáznak.

---

más úton:

A gázok belső energiája megegyezik a gázt (mint anyaghalmazt) alkotó részecskék mozgási energiájának összegével.

1 db gázatom mozgási energiája:

$$\bar{\varepsilon}_{mozgási} = \frac{f}{2} \cdot k \cdot T$$

- f: szabadsági fok (bővebben: Wikipédia)
- k: Boltzmann-állandó $(1{,}38 \cdot 10^{-23}\, J/K)$
- T: hőmérséklet $[K]$

Az oxigén kétatomos gáz (mivel 2 db oxigénatom alkot 1 molekulát), így ebben a példában: $f = 5$. (részletesebb indoklás a fent linken olvasható, a lényeg, hogy kétatomos gázokra $f = 5$)

Mivel mi egy egész anyaghalmaz mozgási energiáját szeretnénk megtudni, nem csak 1 részecskéét, a fenti képletet át kell alakítanunk.

$$U = \frac{f}{2} \cdot n \cdot N_A \cdot k \cdot T$$

- f: szabadsági fok
- n: anyagmennyiség $[mol]$
- N_A: Avogadro-szám $(6 \cdot 10^{23}/mol)$
- k: Boltzmann-állandó $(1{,}38 \cdot 10^{-23}\, J/K)$
- T: hőmérséklet $[K]$

↓ $(R = N_A \cdot k)$

$$U = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$$

- R: egyetemes gázállandó $\left(8{,}31 \frac{J}{mol \cdot K}\right)$

normál állapot:

- 0 °C
- 1 atm nyomás (101.325 Pa)
- 1 mol ideális gáz ilyenkor 22,41 dm^3

Számolás:

$$U_1 = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 273 = 5671{,}6\, J$$

$$U_2 = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 298 = 6191\, J$$

↓

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 6191 - 5671{,}6 = 519{,}4\, J$$

	f	n	R	T	U
1. állapot	5	1 mól	8,31 J/(mol·K)	273 K	5671,6 J
2. állapot	5	1 mól	8,31 J/(mol·K)	298 K	6191 J
különbség:	-	-	-	25 K	519,4 J

$519{,}4\,J \simeq 520\,J$

b) izobár folyamat

$\Delta E = Q_E + W$

Először kiszámoljuk az első tagot (1.), majd a másodikat (2.). Végül összeadjuk a kettőt (3.), így megkapjuk a teljes belső energiaváltozást.

1. $Q_E = c_p \cdot m \cdot \Delta T = 920 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 0{,}032\,kg \cdot 25\,K = 736\,J$

2. $W_V = -p \cdot \Delta V$ és $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

$\downarrow$

$W_V = -p \cdot \Delta V = -n \cdot R \cdot \Delta T$

$\downarrow$

$W_V = -n \cdot R \cdot \Delta T = -1\,mol \cdot 8{,}31 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 25\,K = -207{,}75\,J$

3. $\Delta E = Q_E + W = 736\,J + (-207{,}75\,J) = 736\,J - 207{,}75\,J = 528{,}25\,J \simeq 528\,J$

Válasz: 528 J-lal változik meg (nő) a belső energiája az oxigéngáznak.

70. példa *a) Mennyi a szabad entalpiája egy 200 ml térfogatú, $0{,}02\frac{mol}{l}$ koncentrációjú glükóz oldatnak 25 °C-on?*

b) Mekkora ebből a keveredési tag?

<u>Adatok:</u>

- térfogat: $V = 200\,ml = 0{,}2\,l = 0{,}2\,dm^3$ *(szöveg)*
- koncentráció: $c = 0{,}02\frac{mol}{l} = 0{,}02\frac{mol}{dm^3}$ *(szöveg)*
- hőmérséklet: $T = 25\,^oC = 25+273 = 298\,K$ *(szöveg)*
- standard kémiai potenciál: $\mu^0 = -902{,}5\frac{kJ}{mol} = -902.500\frac{J}{mol}$ *(Állandók és adatok)*

<u>Releváns törvények:</u>

$G = \mu_A v_A + \mu_B v_B$ *(III. Transzportjelenségek az élő rendszerekben; III.105)*

- G: szabadentalpia $[J]$
- μ: kémiai potenciál $\left[\frac{J}{mol}\right]$
- v: anyagmennyiség $[mol]$

$\mu_A = \mu^0{}_A + RT\ln(c_A)$ *(III. Transzportjelenségek az élő rendszerekben; III.109)*

- μ_A: A anyag aktuális kémiai potenciálja $\left[\frac{J}{mol}\right]$
- $\mu^0{}_A$: A anyag standard kémiai potenciálja $\left[\frac{J}{mol}\right]$
- R: egyetemes gázállandó $\left(8{,}31\frac{J}{mol\cdot K}\right)$
- T: hőmérséklet $[K]$
- c_A: A anyag koncentrációja $\left[\frac{mol}{dm^3}\right]$

<u>Számolás:</u>

a) Az oldat szabadentalpiája (G, angolszász nevén Gibbs-féle szabadenergia vagy Gibbs-potenciál) megegyezik a komponensek szabadentalpiájának összegével, amit pedig a kémiai potenciál (*μ*) és az anyagmennyiség (*v*) szorzataként kapunk:

$G = \mu_A v_A + \mu_B v_B$

Példánkban az A anyag lehet például a glükóz, a B anyag pedig a víz (lényegében mindegy). A számolás során a vízben bekövetkező változásokat hanyagoljuk el:

$G = \mu \cdot v$

Az anyagmennyiséget ki tudjuk számolni a számolni a koncentráció és a térfogat segítségével:

$$v = c \cdot V = 0{,}02 \frac{mol}{dm^3} \cdot 0{,}2\, dm^3 = 0{,}004\, mol$$

A kémiai potenciált is ki tudjuk számolni a képlet segítségével:

$$\mu_A = \mu^0{}_A + \underbrace{RT \ln\left(c_A\right)}_{keveredési\, tag} = -902.500 \frac{J}{mol} + 8{,}31 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 298\, K \cdot \ln\left(0{,}02 \frac{mol}{dm^3}\right) \simeq -912.188 \frac{J}{mol}$$

Visszatérünk az eredeti egyenletünkhöz, és behelyettesítjük az előzőekben megszerzett értékeket:

$$G = \mu \cdot v = -912.188 \frac{J}{mol} \cdot 0{,}004\, mol \simeq -3649\, J \simeq -3{,}65\, kJ$$

b) A keveredési tag aránya a teljes kémiai potenciálra vonatkoztatva kiszámolható a moláris értékekből:

$$\frac{RT \ln\left(c_A\right)}{\mu_A} = \frac{8{,}31 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 298\, K \cdot \ln\left(0{,}02 \frac{mol}{dm^3}\right)}{-912.188 \frac{J}{mol}} = \frac{-9688}{-912.188} \simeq 0{,}0106$$

↓

$$0{,}0106 \cdot 100\,\% = 1{,}06\,\%$$

<u>Válasz:</u> a) -3,65 kJ a glükóz oldat szabad entalpiája.

b) 1,06 % ebből a keveredési tag.

74. példa

Izotópvizsgálatok alapján megállapították, hogy a sejtmembrán K^+-ionra nézve permeábilis. Emlősizom intracelluláris, illetve extracelluláris folyadékában (az intracelluláris térben jelen levő immobilis negatív fehérje ionok miatt) a K^+-ion koncentráció 155, ill. 4 mmol/l. Mekkora elektromotoros erő származik ebből a koncentrációkülönbségből testhőmérsékleten (37 °C)?

Adatok:

- extracelluláris K^+-koncentráció: $c_1 = 4\,\frac{mmol}{l}$ *(szöveg)*
- intracelluláris K^+-koncentráció: $c_2 = 155\,\frac{mmol}{l}$ *(szöveg)*
- testhőmérséklet: $T = 37\,^{o}C = (37+273)\,K = 310\,K$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

Nernst-egyenlet:

$$U = \Delta\phi = -\frac{RT}{zF}\ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

(III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.123)

- $\Delta\phi$: elektromos potenciálkülönbség $[V]$
- R: az egyetemes gázállandó $\left(8{,}314\,\frac{J}{mol\cdot K}\right)$
- T: hőmérséklet $[K]$
- z: töltések száma
- F: Faraday-állandó $\left(96.500\,\frac{C}{mol}\right)$

Számolás:

$$U = \Delta\phi = -\frac{RT}{zF}\ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = -\frac{8{,}31\cdot 310}{1\cdot 96.500}\cdot\ln\left(\frac{4\,mmol/l}{155\,mmol/l}\right) \simeq (-0{,}0267)\cdot(-3{,}657) \simeq 0{,}098\,V = 98\,mV$$

$z = 1$, mert a K atom egyszeresen pozitív iont képez (egy elektron leadásával).

Válasz: 98 mV elektromotoros erő származik ebből a koncentrációkülönbségből.

75. példa

Hány dB változást jelent, ha a jelfeszültség a felére csökken?

Adatok:

- $U_{ki} = \frac{U_{be}}{2} = 0{,}5 U_{be}$ (A kimenő feszültség a bemenő feszültség fele.)

Releváns törvények:

$$K_U = \frac{U_{ki}}{U_{be}}$$ (Erősítő; 3)

- K_U: feszültségerősítés mértéke $[arányszám]$
- U_{ki}: bemenő jej feszültsége $[V]$
- U_{be}: kimenő jel feszültsége $[V]$

$$n = 20 \cdot lg K_U$$ (Erősítő; 6)

- n: erősítésszint $[dB]$
- K_U: feszültségerősítés mértéke $[arányszám]$

Számolás:

$$K_U = \frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{0{,}5 U_{be}}{U_{be}} = \frac{1}{2}$$

$$n = 20 \cdot lg K_U = 20 \cdot lg \frac{1}{2} = -6\, dB$$

Válasz: Mínusz 6 dB változást jelent.

76. példa

Valakinek a hallásvesztesége adott frekvencián 40 dB.

a) *Mekkora intenzitású hangot vesz észre, ha az alkalmazott frekvencián a hallásküszöb* $5 \cdot 10^{-12}\frac{W}{m^2}$ *?*

Releváns törvény, számolás:

$$n = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

(Audiometria; 5)

- n: hallásveszteség $[dB]$
- J: az az intenzitás, amit már meghall a halláskárosult ember $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- J_0: átlagos hallásküszöb $\left[\frac{W}{m^2}\right]$

↓

$$40 = 10 \cdot lg\left(\frac{J}{5 \cdot 10^{-12}}\right)$$

↓

$$\frac{40}{10} = 4 = lg\left(\frac{J}{5 \cdot 10^{-12}}\right)$$

↓

$$10^4 = \frac{J}{5 \cdot 10^{-12}}$$

↓

$$J = 10^4 \cdot (5 \cdot 10^{-12}) = 5 \cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2}$$

Válasz: $5 \cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2}$ intenzitású hangot vesz észre.

b) *Ha ekkora intenzitású hangból egy fal* $5 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ *-t enged át, akkor azt mondjuk, hogy a fal hangszigetelő képessége 40 dB. Hányszoros felezési rétegvastagságú ez a fal?*

Releváns törvény, számolás:

$J = J_0 \cdot 2^{-\frac{x}{D}}$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.12)

- J: kilépő (gyengített) intenzitás $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- x: rétegvastagság $[cm]$
- D: felezési rétegvastagság $[cm]$

↓ */ átrendezzük az egyenletet*

$$\frac{J}{J_0} = 2^{-\frac{x}{D}}$$

↓ */ behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\frac{5 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2}}{5 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2}} = 2^{-\frac{x}{D}}$$

↓

$$10^{-4} = 2^{-\frac{x}{D}}$$

↓ */ matek (logaritmizálás)*

$$-4 = \left(-\frac{x}{D}\right) \cdot (lg\,2)$$

↓ */ : lg2*

$$\frac{-4}{lg\,2} = -\frac{x}{D}$$

↓

$$-13{,}3 = -\frac{x}{D}$$

↓ */ ·(-1)*

$$\frac{x}{D} = 13{,}3$$

Válasz: 13,3-szoros felezési rétegvastagságú a fal.

c) *Ha a fal 12 cm vastag, mekkora a fal anyagának felezési rétegvastagsága és gyengítési együtthatója erre a hangra?*

Releváns törvény, számolás:

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.11)

- J: kilépő (gyengített) intenzitás $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- x: rétegvastagság $[cm]$
- μ: lineáris gyengítési együttható $[cm^{-1}]$

↓

$5 \cdot 10^{-12} = 5 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-12\mu}$

↓

$\ln\left(\frac{5 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-8}}\right) = \ln\left(10^{-4}\right) = -12\,\mu$

↓

$\mu = 0{,}77\, cm^{-1}$

$\mu = \frac{ln2}{D}$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.13)

- μ: lineáris gyengítési együttható $[cm^{-1}]$
- D: felezési rétegvastagság $[cm]$

↓

$D = \frac{ln2}{\mu} = \frac{ln2}{0{,}77} = 0{,}9\, cm$

Válasz: Gyengítési együtthatója erre a hangra 0,77 cm^{-1}, felezési rétegvastagsága 0,9 cm.

77. példa

Mr. Süketet, akinek 30 dB hallásromlása van, 15-szörös felezőrétegnyi fal ellenére is zavarja a szomszéd házibuli. Csak akkor nem hallja, ha 45 dB csillapítást okozó füldugót használ. Mekkora hangintenzitás éri a falat a másik oldalon? (Az egyszerűség kedvéért számoljunk úgy, mintha 1 kHz-es lenne a hang.)

Adatok:

- az emberi fül hallásküszöbe 1 kHz-en: $J_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ (Állandók és adatok)
- összes veszteség: 15-szörös felezőréteg (fal) + 30 dB (hallásromlás) + 45 dB (füldugó)

Releváns törvény:

$n = 10 \, lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$ (Audiometria; 5)

- n: hallásveszteség $[dB]$
- J: az az intenzitás, amit már meghall a halláskárosult ember $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- J_0: átlagos hallásküszöb $\left[\frac{W}{m^2}\right]$

Elmélet:

A kezdeti intenzitás csökkenésének (az „ideális” homo sapiens sapienshez képest, akinek nincs hallásromlása) 3 oka van (lásd fent). A fal „15-ször felezi” a kezdeti intenzitást. Ha x-szel jelöljük a kezdeti intenzitást, akkor a következő megállapítást tudjuk tenni: $J = \frac{x}{2^{15}}$. Csak ez jut át a fal egyik oldaláról a másikra (Mr. Sükethez). Ezenkívül 2 tényezővel kell még számolnunk: a hallásromlással és a füldugóval. Ezek összesen $30\, dB + 45\, db = 75\, dB$ csillapítást okoznak.

Számolás:

$$n = 10 \cdot lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

↓ */ :10*

$$\frac{n}{10} = lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

↓ */ matek és behelyettesítés*

$$\frac{J}{J_0} = 10^{\frac{n}{10}} = 10^{\frac{75}{10}} = 10^{7,5} \simeq 3,1623 \cdot 10^7$$

↓ */ logika (elmélet)*

$$\frac{\frac{x}{2^{15}}}{J_0} = 3,1623 \cdot 10^7$$

↓ */ átrendezés és behelyettesítés*

$$x = (3,1623 \cdot 10^7) \cdot (J_0) \cdot (2^{15}) = (3,1623 \cdot 10^7) \cdot \left(10^{-12} \frac{W}{m^2}\right) \cdot (2^{15}) = 1,036 \approx 1 \frac{W}{m^2}$$

Válasz: $1 \frac{W}{m^2}$ hangintenzitás éri a falat a másik oldalon.

78. példa

Mekkora intenzitású 300 Hz-es hangot hall meg az az ember, akinek a hallásvesztesége ezen a frekvencián (ahol az átlagos hallásküszöb $3 \cdot 10^{-11}$ W/m^2) 25 dB?

Adatok:

- hallásveszteség: $n = 25\,dB$ *(szöveg)*
- átlagos hallásküszöb: $J_0 = 3 \cdot 10^{-11}\,\frac{W}{m^2}$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$$n = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

(Audiometria; 5)

- n: hallásveszteség $[dB]$
- J: az az intenzitás, amit már meghall a halláskárosult ember $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- J_0: átlagos hallásküszöb $\left[\frac{W}{m^2}\right]$

Számolás:

$$n = 10 \cdot lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

↓ */ :10*

$$\frac{n}{10} = lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

↓ */ matek*

$$\frac{J}{J_0} = 10^{\frac{n}{10}}$$

↓ */ átrendezés és behelyettesítés*

$$J = J_0 \cdot 10^{\frac{n}{10}} = \left(3 \cdot 10^{-11}\,\frac{W}{m^2}\right) \cdot \left(10^{\frac{25}{10}}\right) = 9{,}487 \cdot 10^{-9}\,\frac{W}{m^2} \approx 9{,}5 \cdot 10^{-9}\,\frac{W}{m^2}$$

Válasz: $9{,}5 \cdot 10^{-9}\,\frac{W}{m^2}$ intenzitású hangot hall meg.

79. példa

Egy ember 45 dB-es halláskárosodását olyan hallásjavító készülékkel kompenzáltuk, amelyben a mikrofon 5 %, a hangszóró pedig 8 % hatásfokkal végzi az átalakítást. Hány dB az elektromos erősítés?

Adatok:

- halláskárosodás: $n = 45\,dB$ *(szöveg)*
- mikrofon hatásfoka: 5% *(szöveg)*
- hangszóró hatásfoka: 8% *(szöveg)*

Releváns törvény:

$$n = 10\cdot lg\left(\frac{P_{ki}}{P_{be}}\right)$$ (IV. Az érzékszervek biofizikája; IV.26)

- n: teljesítményerősítés $[dB]$
- P_{ki}: kimenő teljesítmény $[W]$
- P_{be}: bemenő teljesítmény $[W]$

Elmélet, számolás:

A végleges elektromos erősítés két tagból áll össze. Az első tag a halláskárosodás kompenzációja (biológialiag indukált komponens). A második tag az átalakítási veszteség miatti „plusz erősítés” (elektrotechnikailag indukált komponens). Az első tagot tudjuk (45 dB), így a kérdés a továbbiakban: mennyi az átalakítási veszteség miatt szükséges plusz teljesítmény?

$$elektromos\,hatásfok = hatásfok_{mikrofon}\cdot hatásfok_{hangszóró} = 0{,}05\cdot 0{,}08 = 0{,}004$$

Ez azt jelenti, hogy a teljes befektetett elektromos energia 4 ezrede hasznosul, a többi veszteség. A hatásfok reciproka a teljesítmények aránya: $1/0{,}004 = 250$ Szemléltetve a számok mögött meghúzódó jelentést: 250 egység energiát kell elektromosan befektetni, hogy 1 egységnyi energia hallható legyen.

$$n = 10\cdot lg\left(\frac{P_{ki}}{P_{be}}\right) = 10\cdot lg(250) = 24\,dB$$

Ez a 24 dB tehát a technikai veszteség miatt kell. (Az átalakítás messze nem tökéletes, nem 100 %-os hatásfokú.) Ezen kívül azonban számolni kell az eleve fennálló halláskárosodással is, aminek mértéke 45 dB. Így a két tagból álló összeg az alábbi módon számolható ki.

$$elektromos\,erősítés = 45\,dB + 24\,dB = 69\,dB$$

Válasz: Az elektromos erősítés 69 dB.

80. példa

Laci 2 méterre ül egy pontszerűnek tekinthető 40 W elektromos teljesítményt fölvevő hangszórótól, melynek átalakítási hatásfoka 8 %. A hangszóró 1000 Hz-es hangot ad. Hány phon-os hangot hall Laci?

Adatok:

- távolság: $r = 2\,m$ *(szöveg)*
- teljesítmény: $P = 40\,W$ *(szöveg)*
- hatásfok: $\eta = 8\% = 0{,}08$ *(szöveg)*
- frekvencia: $f = 1000\,Hz$ *(szöveg)*
- az emberi fül hallásküszöbe 1 kHz-en: $J_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvények:

$$J = \frac{P}{A}$$ *(fej)*

- J: intenzitás $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- P: teljesítmény $[W]$
- A: felület $[m^2]$

$$P_{hasznos} = P \cdot \eta$$ *(fej)*

- $P_{hasznos}$: hasznos teljesítmény $[W]$
- P: összes teljesítmény $[W]$
- η: hatásfok $[arányszám]$

$$A_{gömb} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$ *(matek)*

- $A_{gömb}$: gömb felszíne $[m^2]$
- r: a gömb sugara $[m]$
- π: pi (~3,14)

$$n = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$ *(Audiometria; 5)*

- n: intenzitásszint $[dB]$
- J: tényleges intenzitás $\left[\frac{W}{m^2}\right]$
- J_0: átlagos hallásküszöb, küszöb intenzitás, referencia intenzitás $\left[\frac{W}{m^2}\right]$

Számolás:

Először ki kell számolnunk a hang intenzitását ott, ahol Laci ül.

Az intenzitás (teljesítménysűrűség) definíciószerűen: $J = \frac{P}{A}$

A fenti képletből is látszik, hogy ahhoz, hogy ezt meg tudjuk tenni, tudnunk kell a hasznos (valódi) teljesítményt (1) és a felületet, melyen a teljesítmény eloszlik (2). Tehát:

(1) hasznos teljesítmény: $P_{hasznos} = P \cdot \eta = 40\,W \cdot 0{,}08 = 3{,}2\,W$

(2) a hangszórótól 2 m-re lévő (képzeletbeli) gömb felülete: $A_{gömb} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 4 \cdot (2\,m)^2 \cdot \pi = 50{,}26\,m^2$

↓ *behelyettesítjük a már meglévő adatokat*

$$J = \frac{P_{hasznos}}{A_{gömb}} = \frac{3{,}2\,W}{50{,}26\,m^2} \simeq 0{,}0637\,\frac{W}{m^2}$$

A hang intenzitása ott, ahol Laci ül: $0{,}0637\,\frac{W}{m^2}$

↓ *ebből már tudunk intenzitásszintet számítani*

$$n = 10 \cdot lg\left(\frac{J}{J_0}\right) = 10 \cdot lg\left(\frac{0{,}0637\,\frac{W}{m^2}}{10^{-12}\,\frac{W}{m^2}}\right) \simeq 10 \cdot 10{,}8 = 108\,dB$$

Válasz: 1000 Hz-nél az intenzitásszint és a hangosságszint értéke azonos, ergo Laci 108 phonos hangot hall.

81. példa

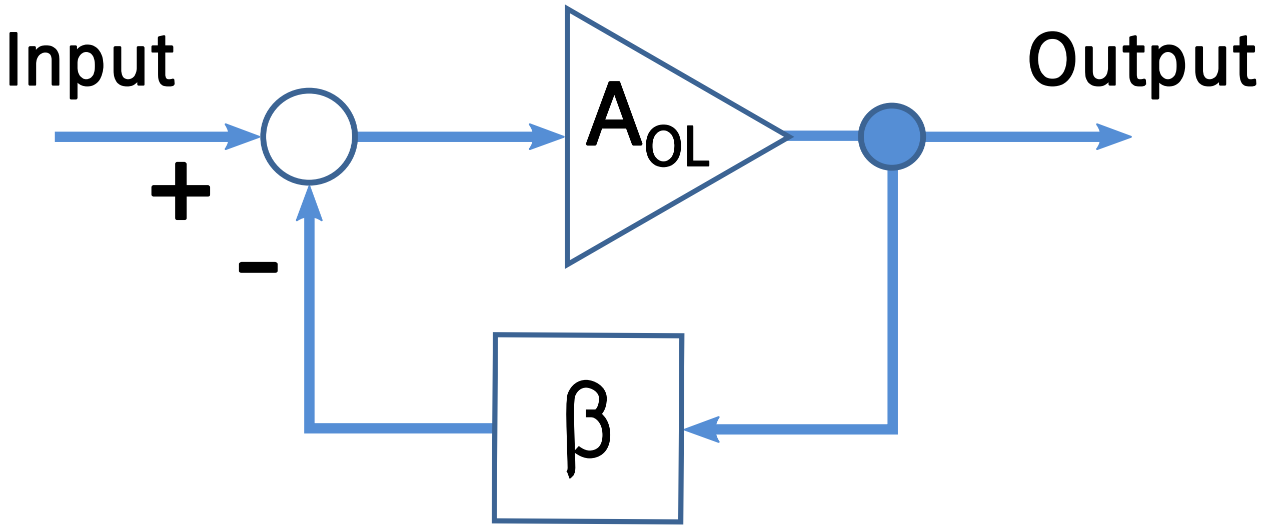
Egy erősítő teljesítményerősítése 13 dB. Negatív visszacsatolással ezt az értéket 10 dB-re csökkentettük. A kimenő teljesítmény hányadrészét csatoltuk vissza?

Adatok:

- eredeti teljesítményerősítés: $n = 13\,dB$ *(szöveg)*
- megváltozott teljesítményerősítés: $n = 10\,dB$ *(szöveg)*

Elmélet, releváns törvények:

ajánlott cikk: Negative feedback amplifier (Wikipédia)



$$K_P = \frac{P_{ki}}{P_{be}}$$ *(VII. Elektromos jelek és módszerek az orvosi gyakorlatban; VII.6)*

- K_P: teljesítményerősítési tényező $[aranyszám]$
- P_{ki}: kimenő teljesítmény $[W]$
- P_{be}: bemenő teljesítmény $[W]$

Egyszerű teljesítmény arányok helyett gyakran azok logaritmusát használjuk. Ez a Decibel-skála.

$$n = 10 \cdot lg\left(\frac{P_{ki}}{P_{be}}\right)$$ *(IV. Az érzékszervek biofizikája; IV.26)*

- n: teljesítményerősítés $[dB]$
- P_{ki}: kimenő teljesítmény $[W]$
- P_{be}: bemenő teljesítmény $[W]$

$$K_{P(-visszacsatolás)} = \frac{K_P}{1+K_V \cdot K_P}$$

- $K_{P(-visszacsatolás)}$: az erősítő - visszacsatolás hatására - megváltozott teljesítményerősítése
- K_P: az erősítő teljesítményerősítése (az ábrán A_{OL}, mint original amplifying)
- K_V: a visszacsatoló áramkör erősítési tényezője (az ábrán β)

<u>Számolás:</u>

$$n = 10 \cdot lg\left(\frac{P_{ki}}{P_{be}}\right) \quad \text{és} \quad K_P = \frac{P_{ki}}{P_{be}}$$

↓

$$n = 10 \cdot lg(K_P)$$

↓ *\/ behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$13\,dB = 10 \cdot lg(K_P)$$

↓ */ :10*

$$1{,}3\,dB = lg(K_P)$$

↓ */ matek*

$$K_P = 10^{1{,}3} \simeq 20{,}0$$

Ez azt jelenti, hogy az eredeti konstrukcióban az erősítő a bemenő teljesítményt a 20-szorosára növelte (másképp: a kimenő teljesítmény a bemenő teljesítmény 20-szorosa volt). Ám ez a negatív visszacsatolás hatására megváltozik:

$$n = 10\,lg(K_{P(-visszacsatolás)})$$

↓ */ behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$10\,dB = 10 \cdot lg(K_{P(-visszacsatolás)})$$

↓ */ :10*

$$1 = lg(K_{P(-visszacsatolás)})$$

↓ */ matek*

$$K_{P(-visszacsatolás)} = 10^1 = 10$$

$$K_{P(-visszacsatolás)} = \frac{K_P}{1+K_V \cdot K_P}$$

↓ */ behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$10 = \frac{20}{1+K_V \cdot 20}$$

↓

$$10 = \frac{20}{1+20\,K_V}$$

↓ $\qquad\qquad$ / $\cdot\left(1+20\,K_V\right)$

$$10+200\,K_V = 20$$

↓ $\qquad\qquad$ / *-10*

$$200\,K_V = 10$$

↓ $\qquad\qquad$ / *:200*

$$K_V = \frac{10}{200} = 0{,}05$$

<u>Válasz:</u> A kimenő teljesítmény 0,05-szörösét (20-ad részét) csatoltuk vissza.

85. példa

Az ultrahang echogramot oszcilloszkópon vettük fel. 5 kHz-es fűrészfrekvencia és 8 cm-es képszélesség esetén a testfelületről és egy belső felületről érkező echójelek 3 cm-re vannak egymástól. Milyen mélyen van a reflektáló réteg, ha az ultrahang testszövetbeli sebessége 1500 m/s?

Adatok:

- fűrészfrekvencia: $f = 5\,kHz = 5000\,Hz$ *(szöveg)*
- képszélesség: $s = 8\,cm = 0{,}08\,m$ *(szöveg)*
- echójelek távolsága: $s = 3\,cm = 0{,}03\,m$ *(szöveg)*
- ultrahang testszövetbeli sebessége: $v_{UH} = 1500\,\frac{m}{s}$ *(szöveg)*

Releváns törvények, számolás:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5000\,\frac{1}{s}} = 0{,}0002\,s$$

- T: periódusidő $[s]$
- f: frekvencia $\left[Hz = \frac{1}{s}\right]$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{0{,}08\,m}{0{,}0002\,s} = 400\,\frac{m}{s}$$

- s: képszélesség $[m]$
- t: periódusidő $[s]$

$$t_2 = \frac{s}{v} = \frac{0{,}03\,m}{400\,\frac{m}{s}} = 7{,}5\cdot 10^{-5}\,s$$

$$s = v\cdot t = \left(1500\,\frac{m}{s}\right)\cdot\left(7{,}5\cdot 10^{-5}\,s\right) = 0{,}1125\,m = 11{,}25\,cm$$

ez a teljes út oda-vissza → a reflektáló réteg távolsága ennek fele: $\frac{11{,}25\,cm}{2} = 5{,}625\,cm$

Válasz: 5,625 cm mélyen van a reflektáló réteg.

88. példa

a) Mekkora az ultrahang hullámhossza vízben, ha a frekvencia 800 kHz, és a vízbeli hangsebesség 1500 m/s?
b) Mekkora a reflexiós hányad izom és csont határán az alábbi táblázat alapján?

Adatok:

	izomban	csontban
hangsebesség (m/s)	1600	3600
sűrűség (kg/m^3)	1040	1700

- frekvencia: $f = 800\,kHz = 8\cdot 10^5\,Hz$ *(szöveg)*
- vízbeli hangsebesség: $c = 1500\,\frac{m}{s} = 1{,}5\cdot 10^3\,\frac{m}{s}$ *(szöveg)*

a) Releváns törvény és számolás

$c = \lambda\cdot f$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.26)

- c: sebesség $\left[\frac{m}{s}\right]$
- λ: hullámhossz $[m]$
- f: frekvencia $\left[Hz = \frac{1}{s}\right]$

↓

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1{,}5\cdot 10^3\,\frac{m}{s}}{8\cdot 10^5\,Hz} = 0{,}001875\,m = 1{,}875\,mm$$

Válasz: Az ultrahang hullámhossza vízben 1,875 mm.

b) Releváns törvények és számolás

$Z = c\cdot\rho$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.67)

- Z: akusztikus impedancia $\left[\frac{kg}{m^2\cdot s}\right]$
- c: sebesség $\left[\frac{m}{s}\right]$
- ρ: anyagsűrűség $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.77)

- R: reflexiós hányad $[arányszám]$
- Z: akusztikus impedancia $\left[\frac{kg}{m^2\cdot s}\right]$

a táblázat alapján:

$$Z_1 = c_1 \cdot \rho_1 = 3600 \cdot 1700 = 6120000 = 6{,}12 \cdot 10^6 \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

$$Z_2 = c_2 \cdot \rho_2 = 1600 \cdot 1040 = 1664000 = 1{,}664 \cdot 10^6 \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

↓ */ behelyettesítjük a kiszámolt akusztikus impedancia értékeket*

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = \left(\frac{6{,}12 \cdot 10^6 - 1{,}664 \cdot 10^6}{6{,}12 \cdot 10^6 + 1{,}664 \cdot 10^6}\right)^2 = \left(\frac{4{,}456 \cdot 10^6}{7{,}784 \cdot 10^6}\right)^2 \simeq 0{,}3277 \approx 0{,}33$$

$$R = 0{,}33 \quad \rightarrow \quad 0{,}33 \cdot 100\% = 33\%$$

<u>Válasz:</u> 0,33 (33 %) a reflexiós hányad izom és csont határán.

89. példa

Izom hőkezelését végezzük kondenzátorteres eljárással. (Frekvencia 30 MHz, az izom fajlagos vezetőképessége 30 MHz frekvenciánál 0,8 $\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$, kezelési idő 3 perc, az izom térfogata 600 cm^3, a térerősség az izomban 100 V/m.) Mekkora hőmérsékletnövekedést eredményez a kezelés, ha a vér a keletkezett hő 70 %-át elszállítja?

Adatok:

- fajlagos vezetőképesség: $\sigma = 0{,}8\,\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ *(szöveg)*
- kezelési idő: $t = 3\,perc = 3\cdot 60 = 180\,s$ *(szöveg)*
- izom térfogata: $V = 600\,cm^3 = 6\cdot 10^{-4}\,m^3$ *(szöveg)*
- térerősség: $E = 100\dfrac{V}{m}$ *(szöveg)*
- izom fajhője: $c = 3{,}76\dfrac{kJ}{kg\cdot K} = 3760\dfrac{J}{kg\cdot K}$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvények:

$Q = \sigma\cdot V\cdot E^2\cdot t$

- Q: hőmennyiség $[J]$
- σ: fajlagos vezetőképesség $[\Omega^{-1}\cdot m^{-1}]$
- E: térerősség $\left[\dfrac{V}{m}\right]$
- t: idő $[s]$

$\Delta Q = c\cdot m\cdot \Delta T$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

- Q: hőmennyiség $[J]$
- c: fajlagos hőkapacitás $\left[\dfrac{J}{kg\cdot K}\right]$
- m: tömeg $[kg]$
- T: hőmérséklet $[K]$

$\rho = \dfrac{m}{V}$ *(a sűrűség definíciója; alapvető összefüggés)*

- ρ: sűrűség $\left[\dfrac{kg}{m^3}\right]$
- m: tömeg $[kg]$
- V: térfogat $[m^3]$

Számolás:

$Q = \sigma\cdot V\cdot E^2\cdot t = (0{,}8)\cdot(6\cdot 10^{-4})\cdot(100^2)\cdot(180) = 864\,J$

A keletkezett hő 70 %-át elszállítja a vér, így a továbbiakban csupán az eredeti hő 30 %-ával kell számolnunk.

$864\,J\cdot 0{,}3 = 259{,}2\,J$

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$
↓
$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c \cdot m}$$

Itt beleütközünk egy olyan problémába, hogy nem tudjuk a kezelt izom tömegét, csak a térfogatát. Szerencsénkre a képlettárban az Állandók és adatok című résznél meg van adva a lágy testszövetek átlagos sűrűsége, melynek segítségével már ki tudjuk számolni az izom tömegét is. (Természetesen ez csak közelítés, de nekünk most bőven elég.)

$$\rho = \frac{m}{V}$$
↓
$$m = \rho \cdot V = \left(1{,}04 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(6 \cdot 10^{-4} m^3\right) = 0{,}624\, kg$$

Most visszatérhetünk az előző egyenletünkhöz, ahol már csak be kell helyettesítenünk a meglévő adatokat.

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c \cdot m} = \frac{259{,}2\, J}{3760 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot 0{,}624\, kg} \simeq 0{,}11\, K = 0{,}11\, ^oC$$

Válasz: 0,11 ^{o}C-os hőmérsékletnövekedést eredményez a kezelés.

90. példa *Hány fokot melegedne 10 perces kezelés alatt az izomszövet, ha benne 100 V/m nagyságú térerősséget hozunk létre, és feltételezzük, hogy a véráram a termelt hő 30 %-át elszállítja? (Az izom fajhője 3,76 kJ/(kg·K), vezetőképessége 0,8 $\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$, sűrűsége 1,04 g/cm^3.)*

Adatok:

- fajlagos vezetőképesség: $\sigma = 0{,}8\,\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ *(szöveg)*
- kezelési idő: $t = 10\,perc = 10\cdot 60 = 600\,s$ *(szöveg)*
- izom térfogata: $V = 600\,cm^3 = 6\cdot 10^{-4}\,m^3$ *(89-es feladat szövege)*
- térerősség: $E = 100\dfrac{V}{m}$ *(szöveg)*
- izom fajhője: $c = 3{,}76\dfrac{kJ}{kg\cdot K} = 3760\dfrac{J}{kg\cdot K}$ *(Állandók és adatok)*

Releváns törvények:

$$Q = \sigma\cdot V\cdot E^2\cdot t$$

- Q: hőmennyiség $[J]$
- σ: fajlagos vezetőképesség $[\Omega^{-1}\cdot m^{-1}]$
- E: térerősség $\left[\dfrac{V}{m}\right]$
- t: idő $[s]$

$$\Delta Q = c\cdot m\cdot \Delta T$$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

- Q: hőmennyiség $[J]$
- c: fajlagos hőkapacitás $\left[\dfrac{J}{kg\cdot K}\right]$
- m: tömeg $[kg]$
- T: hőmérséklet $[K]$

$$\rho = \frac{m}{V}$$ *(a sűrűség definíciója; alapvető összefüggés)*

- ρ: sűrűség $\left[\dfrac{kg}{m^3}\right]$
- m: tömeg $[kg]$
- V: térfogat $[m^3]$

Számolás:

$$Q = \sigma\cdot V\cdot E^2\cdot t = (0{,}8)\cdot(6\cdot 10^{-4})\cdot(100^2)\cdot(600) = 2880\,J$$

A keletkezett hő 30 %-át elszállítja a vér, így a továbbiakban csupán az eredeti hő 70 %-ával kell számolnunk.

$$2880\,J\cdot 0{,}7 = 2016\,J$$

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

↓

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c \cdot m}$$

Itt beleütközünk egy olyan problémába, hogy nem tudjuk a kezelt izom tömegét, csak a térfogatát. Szerencsénkre a képlettárban az Állandók és adatok című résznél meg van adva a lágy testszövetek átlagos sűrűsége, melynek segítségével már ki tudjuk számolni az izom tömegét is. (Természetesen ez csak közelítés, de nekünk most bőven elég.)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

↓

$$m = \rho \cdot V = \left(1{,}04 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(6 \cdot 10^{-4} m^3\right) = 0{,}624\, kg$$

Most visszatérhetünk az előző egyenletünkhöz, ahol már csak be kell helyettesítenünk a meglévő adatokat.

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c \cdot m} = \frac{2016\, J}{3760 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot 0{,}624\, kg} \simeq 0{,}86\, K = 0{,}86\, {}^oC$$

<u>Válasz:</u> 0,86 °C-ot melegedne az izomszövet.

91. példa

Mekkora feszültségre kell feltölteni egy defibrillátor 20 μF kapacitású kondenzátorát, hogy a defibrilláló impulzus energiája 160 J legyen?

Adatok:

- kapacitás: $C = 20\mu F = 20 \cdot 10^{-6} F = 2 \cdot 10^{-5} F$ *(szöveg)*
- energia: $E = 160\, J$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$E_{kondenzátor} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$ (A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)

- E: energia $[J]$
- C: kapacitás $[F]$
- U: feszültség $[V]$

Számolás:

$E_{kondenzátor} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$U = \sqrt{\frac{E_{kondenzátor}}{\frac{1}{2} \cdot C}} = \sqrt{\frac{160\, J}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-5} F}} = 4000\, V = 4\, kV$$

Válasz: 4 kV-ra kell feltölteni a kondenzátort.

92. példa

Szívritmusszabályozó (pacemaker) 1 ms időtartamú négyszögimpulzusainak feszültségamplitúdója 4 V. Mekkora egy impulzus energiája, ha az ingerelt területnek az elektródok közötti ellenállása 800 Ω?

Adatok:

- feszültség: $U = 4\,V$ *(szöveg)*
- ellenállás: $R = 800\,\Omega$ *(szöveg)*
- idő: $t = 1\,ms = 1 \cdot 10^{-3}\,s$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

$$R = \frac{U}{I}$$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

- R: ellenállás $[\Omega]$
- U: feszültség $[V]$
- I: áramerősség $[A]$

↓

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\,V}{800\,\Omega} = 0{,}005\,A$$

$$P_{elektromos} = U \cdot I$$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

- $P_{elektromos}$: elektromos teljesítmény $[W]$
- U: feszültség $[V]$
- I: áramerősség $[A]$

↓

$$P_{elektromos} = 4\,V \cdot 0{,}005\,A = 0{,}02\,W$$

$$P = \frac{E}{t}$$ *(a teljesítmény definíciója)*

- P: teljesítmény $\left[1\,W = \frac{1\,J}{1\,s}\right]$
- E: energia $[J]$
- t: idő $[s]$

↓

$$E = P \cdot t = (0{,}02\,W) \cdot (1 \cdot 10^{-3}\,s) = 2 \cdot 10^{-5}\,J = 20 \cdot 10^{-6}\,J = 20\,\mu J$$

↓

$$E_{impulzus} = 20\,\mu J$$

Válasz: Egy impulzus energiája 20 μJ.

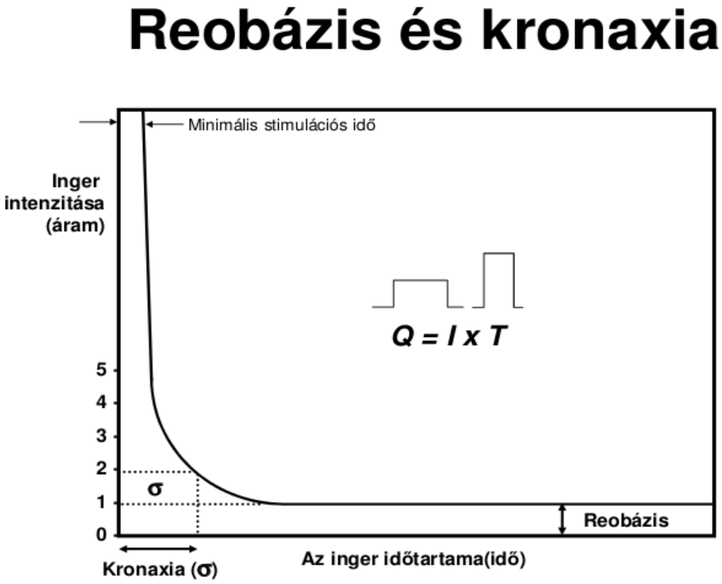
93. példa *Hány mól egyértékű ion transzportja jelenti a küszöbtöltést, ha a reobázis 4 mA és a kronaxia 0,4 ms?*

Adatok:

- reobázis: $I = 4\,mA = 4\cdot 10^{-3}\,A$ *(szöveg)*
- kronaxia: $t = 0{,}4\,ms = 4\cdot 10^{-4}\,s$ *(szöveg)*

Elmélet:

- Egy coulomb (C) az a töltés mennyiség, amely egy amper (1 A) áramerősség esetén egy másodperc (1 s) idő alatt átfolyik a vezetőn. (Egyes területeken az ampermásodperc (As) használatos helyette.)
- reobázis: Az az elméletileg létező legkisebb inger, amit végtelenül hosszú ideig alkalmazva még éppen sikerül akciós potenciált kiváltani.
- kronaxia: A reobázis amplitúdójának kétszereséhez tartozó időtartam.



Releváns törvény és számolás:

$$Q = I\cdot t = 4\cdot 10^{-3}\,A\cdot 4\cdot 10^{-4}\,s = 1{,}6\cdot 10^{-6}\,C$$

- Q: elektromos töltés mennyiség $[C]$
- I: áramerősség $[A]$
- t: idő $[s]$

1 mól egyértékű elektromos részecske töltése 96.500 coulomb (Faraday-állandó). (Állandók és adatok)

↓

1 mól részecske	96.500 C
x mól részecske	$1{,}6\cdot 10^{-6}$ C

↓

$$x = \frac{1{,}6\cdot 10^{-6}}{96\,500} = 1{,}66\cdot 10^{-11}$$

Válasz: $1{,}66\cdot 10^{-11}$ mól egyértékű ion transzportja jelenti a küszöbtöltést.

94. példa *Hányféleképpen építhető fel 20-féle aminosavból inzulinhoz (51 AS) hasonló méretű polipeptidlánc?*

Számolás:

$20^{51} = 2{,}25 \cdot 10^{66}$

Válasz: $2{,}25 \cdot 10^{66}$-féleképpen építhető fel a polipeptidlánc.

Plusz kérdés: *Ezt a számot nem kellene még kettővel elosztani?*

Pánczél Áron: Ez a feltevés, azon alapul, hogy egy polipeptid lánc két végét nem tudjuk megkülönböztetni egymástól. A megkülönböztetés azonban lehetséges: a C-terminális aminosava szabad karboxil-, míg az N-terminálisé szabad amino-csoporttal fog rendelkezni, így két eltérő végéről felépített, bár amúgy azonos szekvencia különbözni fog, a konstitúciós izoméria ellenére.

Borbély Márton: Következő példámban az aminosavakat nagy nyomtatott betűk jelölik. 5 aminosavból álló modellt alkalmazok, melyet a megértésre elegendő nagyságúnak tartok. A matematikai logika szerint -első ránézésre- úgy tűnik, hogy az „ABCDE” sor megegyezik (nem számít különbözőnek) az „EDCBA”-val, hiszen egymásnak tükörképi párjai. Állapodjunk meg abban, hogy az aminosav-szekvenciát mindig balról jobbra írjuk fel, és az N-terminálistól a C-terminális irányába haladunk. Így már könnyen belátható, hogy az „ABCDE” sor nem egyezik meg az „EDCBA”-val, mert „ABCDE” esetében „A” van az N-terminálison és „E” a C-terminálison, míg „EDCBA” esetében „E” van az N-terminálison és „A” a C-terminálison. Ez két különböző polipeptidlánc, hiába ugyanazok az aminosavak alkotják a végeit. A különbség abban rejlik, hogy más pozícióban vannak a végeken található aminosavak.

Köszönet illeti Pánczél Áront a kérdés precíz megválaszolásáért, lényegre törő észrevételéért!

96. példa *Négy békavörösvérsejt hossza: 18, 17, 21 és 18 μm. Számítsuk ki az átlagot, a szórást és az átlag szórását!*

a,

n darab szám átlaga: a számok összegének *n-ed* része

jele: $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

(Statisztika és informatika; (2))

$$\bar{x} = \frac{18+17+21+18}{4} = \frac{74}{4} = 18{,}5\ \mu m$$

b,

szórás: az átlagtól való négyzetes eltérések számtani közepének négyzetgyöke

jele: s

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{Q_x}{n-1}}$$

(Statisztika és informatika; (4))

$$s = \sqrt{\frac{Q_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{(18{,}5-18)^2+(18{,}5-17)^2+(18{,}5-21)^2+(18{,}5-18)^2}{4-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(0{,}5)^2+(1{,}5)^2+(-2{,}5)^2+(0{,}5)^2}{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3} \simeq 1{,}73\mu m$$

c,

az átlag szórása: a mintavétel eloszlásának szórása

(átlag szórása = standard hiba)

jele: $s_{\bar{x}}$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

(Statisztika és informatika; (8))

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = 0{,}87\mu m$$

97. példa

25 hallgató testmagasságának átlaga 170 cm, a szórás 8 cm. Becsülje meg a várható értéket 95 %-os konfidencia szinten!

Adatok:

- átlag: $\bar{x} = 170\,cm$ *(szöveg)*
- szórás: $s = 8\,cm$ *(szöveg)*
- elemszám: $n = 25$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$ *(Statisztika és informatika; (8))*

- $s_{\bar{x}}$: standard hiba
- s: szórás
- n: elemszám

Számolás:

Először kiszámoljuk a standard hibát, majd ennek segítségével megbecsüljük a várható értéket.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

a várható érték alsó határa:

$$\bar{x} - 2s_{\bar{x}} = 170 - 2 \cdot 1{,}6 = 166{,}8\,cm$$

a várható érték felső határa:

$$\bar{x} + 2s_{\bar{x}} = 170 + 2 \cdot 1{,}6 = 173{,}2\,cm$$

Válasz: A várható érték (95 %-os konfidencia szinten): 166,8 – 173,2 cm.

105. példa *Egy vizsgálatban az összeszorított fogak között 700 N nyomóerőt mértek, az alsó és felső fogsor érintkezési felülete 0,8 cm². Mekkora az átlagos nyomás?*

Adatok:

- nyomóerő: $F = 700\,N = 7 \cdot 10^2\,N$ *(szöveg)*
- felület: $A = 0{,}8\,cm^2 = 0{,}8 \cdot 10^{-4}\,m^2 = 8 \cdot 10^{-5}\,m^2$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$$p = \frac{F}{A}$$ *(a nyomás definíciója; alapvető összefüggés)*

- p: nyomás $\left[1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2}\right]$
- F: nyomóerő $[N]$
- A: nyomott felület $[m^2]$

Számolás:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{7 \cdot 10^2\,N}{8 \cdot 10^{-5}\,m^2} = 8750000\,N = 8{,}75 \cdot 10^6\,Pa = 8{,}75\,MPa$$

Válasz: Az átlagos nyomás 8,75 MPa.

106. példa *A fogzománc nyomási szilárdsága 400 MPa. Mekkora erő hathat legfeljebb a zománc 1 mm²-ére, hogy ne törjön el?*

Adatok:

- nyomási szilárdság: $\sigma = 400\,MPa = 400 \cdot 10^{6}\,Pa = 4 \cdot 10^{8}\,Pa$ *(szöveg)*
- felület: $A = 1\,mm^{2} = 1 \cdot 10^{-6}\,m^{2}$ *(szöveg)*

Releváns törvény:

$\sigma = \frac{F}{A}$ *(sajnos nincs benne a képlettárban, így kénytelen leszel megtanulni ☺)*

- σ: nyomási szilárdság $\left[1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^{2}}\right]$
- F: erő $[N]$
- A: felület $[m^{2}]$

Számolás:

$\sigma = \frac{F}{A}$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$F = \sigma \cdot A = (4 \cdot 10^{8}\,Pa) \cdot (1 \cdot 10^{-6}\,m^{2}) = 400\,N$

Válasz: Legfeljebb 400 N hathat a zománc 1 mm²-ére.

107. példa

Egy 2 cm² keresztmetszetű Achilles-ín maximális terhelhetősége 20 000 N. Mekkora a szakítási szilárdsága?

Adatok:

- keresztmetszet: $A = 2\,cm^2 = 2\cdot10^{-4}\,m^2$
- maximális terhelhetőség (erő): $F = 20.000\,N = 2\cdot10^4\,N$

Releváns törvény:

$\sigma = \dfrac{F}{A}$ *(sajnos nincs benne a képlettárban, így kénytelen leszel megtanulni ☺)*

- σ: szakítási szilárdság $\left[1\,Pa = \dfrac{1\,N}{1\,m^2}\right]$
- F: maximális terhelhetőség (erő) $[N]$
- A: felület $[m^2]$

Számolás:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2\cdot10^4\,N}{2\cdot10^{-4}\,m^2} = 10^8\,Pa = 100\cdot10^6\,Pa = 100\,MPa$$

Válasz: 100 MPa a szakítási szilárdsága.

108. példa

Kollagénrostot nyújtunk 12 N erővel. A rost keresztmetszete 3 mm², a kollagén rugalmassági együtthatója 500 MPa. Hány %-os a rost relatív megnyújtása?

Adatok:

- erő: $F = 12\,N$
- keresztmetszet: $A = 3\,mm^2 = 3\cdot10^{-6}\,m^2$
- a kollagén rugalmassági együtthatója: $E = 500\,MPa = 5\cdot10^8\,Pa$

Releváns törvény:

A szilárd testek rugalmasságát a Hooke-törvény írja le:

$$\frac{F}{A} = E\cdot\frac{\Delta L}{L}$$

(sajnos nincs benne a képlettárban, így kénytelen leszel megtanulni ☺)

- F: erő $[N]$
- A: a test keresztmetszete $[m^2]$
- E: rugalmassági együttható $[Pa]$
- ΔL: megnyúlás/rövidülés (hosszváltozás) $[m]$
- L: nyugalmi hossz $[m]$

Az $\frac{F}{A}$ hányados a húzófeszültség (σ), és a $\frac{\Delta L}{L}$ a fajlagos megnyúlás (ε). A két hányados közötti nyomás dimenziójú (Pa) arányossági tényező (E) a Young-féle, vagy rugalmassági modulus. Homogén szerkezetű testek esetében a Young-modulus csak az anyagi minőségre jellemző, és nem függ a test alakjától, méretétől.

Számolás:

Mivel a kérdés tulajdonképpen a fajlagos megnyúlás nagyságára irányul (% formájában), célszerű ennek megfelelően átrendezni a Hooke-törvényt:

$$\frac{F}{A} = E\cdot\frac{\Delta L}{L}$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\left(\frac{F}{A}\right)}{E} = \frac{F}{A\cdot E} = \frac{12\,N}{(3\cdot10^{-6}\,m^2)\cdot(5\cdot10^8\,Pa)} = \frac{12}{3\cdot5\cdot10^2} = 0{,}008$$

$$\left(\textit{Gondoljuk végig az egyenletet mértékegységekkel is!}\quad 1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2}\right)$$

↓ */ százalék formába hozzuk a hányadost*

$$0{,}008\cdot100\,\% = 0{,}8\,\%$$

Válasz: A rost relatív megnyújtása 0,8 %.

109. példa *Mekkora erővel lehet egy 0,2 mm² keresztmetszetű elasztikus rostot 100 %-kal megnyújtani? (Az elasztikus rost rugalmassági együtthatója 200 kPa)*

Adatok:

- keresztmetszet: $A = 0{,}2\,mm^2 = 2\cdot 10^{-7}\,m^2$
- megnyúlás: $100\,\%$
- az elasztikus rost rugalmassági együtthatója: $E = 200\,kPa = 2\cdot 10^{5}\,Pa$

Releváns törvény:

A szilárd testek rugalmasságát a Hooke-törvény írja le:

$$\frac{F}{A} = E\cdot\frac{\Delta L}{L}$$ *(sajnos nincs benne a képlettárban, így kénytelen leszel megtanulni ☺)*

- F: erő $[N]$
- A: a test keresztmetszete $[m^2]$
- E: rugalmassági együttható $[Pa]$
- ΔL: megnyúlás/rövidülés (hosszváltozás) $[m]$
- L: nyugalmi hossz $[m]$

Az $\frac{F}{A}$ hányados a húzófeszültség (σ), és a $\frac{\Delta L}{L}$ a fajlagos megnyúlás (ε). A két hányados közötti nyomás dimenziójú (Pa) arányossági tényező (E) a Young-féle, vagy rugalmassági modulus. Homogén szerkezetű testek esetében a Young-modulus csak az anyagi minőségre jellemző, és nem függ a test alakjától, méretétől.

Számolás:

A feladat szövege alapján 100 %-os a megnyúlás, tehát a fajlagos megnyúlás értéke: $\frac{\Delta L}{L} = 1$. A kérdés az erő nagyságára irányul, így célszerű ennek megfelelően átrendezni a Hooke-törvényt:

$$\frac{F}{A} = E\cdot\frac{\Delta L}{L}$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$F = A\cdot E\cdot\frac{\Delta L}{L} = \left(2\cdot 10^{-7}\,m^2\right)\cdot\left(2\cdot 10^{5}\,Pa\right)\cdot(1) = 0{,}04\,N$$

$$\left(\textit{Gondoljuk végig az egyenletet mértékegységekkel is!}\ \ 1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2}\right)$$

Válasz: 0,04 N erővel lehet megnyújtani az elasztikus rostot.

110. példa

Egy csontból kivágott, eredetileg 9 cm hosszúságú, 2 cm átmérőjű henger alakú próbadarab véglapjaira 700-700 N nyomóerő hat merőlegesen. A csont rugalmassági együtthatója 10 GPa.

a) Hány milliméter a darab összenyomódása?

b) Ez hány százalékos rövidülést jelent?

Adatok:

- nyugalmi hossz: $L=9\,cm=0{,}09\,m=9\cdot 10^{-2}\,m$
- átmérő: $d=2\,cm=0{,}02\,m=2\cdot 10^{-2}\,m$
- össz nyomóerő: $F=700\,N+700\,N=1400\,N$
- rugalmassági együttható: $E=10\,GPa=10\cdot 10^{9}\,Pa$

Releváns törvények:

A szilárd testek rugalmasságát a Hooke-törvény írja le:

$$\frac{F}{A}=E\cdot\frac{\Delta L}{L}$$ *(sajnos nincs benne a képlettárban, így kénytelen leszel megtanulni ☺)*

- F: erő $[N]$
- A: a test keresztmetszete $[m^2]$
- E: rugalmassági együttható $[Pa]$
- ΔL: megnyúlás/rövidülés (hosszváltozás) $[m]$
- L: nyugalmi hossz $[m]$

Az $\frac{F}{A}$ hányados a húzófeszültség (σ), és a $\frac{\Delta L}{L}$ a fajlagos megnyúlás (ε). A két hányados közötti nyomás dimenziójú (Pa) arányossági tényező (E) a Young-féle, vagy rugalmassági modulus. Homogén szerkezetű testek esetében a Young-modulus csak az anyagi minőségre jellemző, és nem függ a test alakjától, méretétől.

$$A=r^2\cdot\pi$$ *(matek)*

- A: kör területe
- r: kör sugara
- π: pi (~3,14)

Számolás:

a)

Először kiszámoljuk azt a felületet, amire a nyomóerő hat.

$$A=r^2\cdot\pi=\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\pi=\left(\frac{2\cdot 10^{-2}\,m}{2}\right)^2\cdot\pi\simeq 3{,}1416\cdot 10^{-4}\,m^2$$

A következő törvénynél fontos megemlíteni, hogy mind az erőből, mind a felületből az összeset kell vennünk. Tehát az össz nyomóerővel $(1400\,N)$ és az össz felülettel $\left(2\cdot 3{,}1416\cdot 10^{-4}\,m^2 = 6{,}2832\cdot 10^{-4}\,m^2\right)$ számolunk a továbbiakban.

$$\frac{F}{A} = E\cdot \frac{\Delta L}{L}$$

↓

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\frac{F}{A}}{E}$$

↓

$$\Delta L = \frac{\frac{F}{A}}{E}\cdot L = \frac{F\cdot L}{E\cdot A} = \frac{1400\,N\cdot 0{,}09\,m}{10\cdot 10^9\,Pa\cdot 6{,}2832\cdot 10^{-4}\,m^2} = 2{,}0\cdot 10^{-5}\,m = 2{,}0\cdot 10^{-2}\,mm = 0{,}02\,mm$$

Gondoljuk végig az egyenletet mértékegységekkel is! $1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2}$

$$\Delta L = \frac{F\cdot L}{E\cdot A} = \frac{N\cdot m}{\frac{N}{m^2}\cdot m^2} = m$$

---

b)

Először kiszámoljuk az arányt, majd ezt százalékra váltjuk.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2{,}0\cdot 10^{-5}\,m}{9\cdot 10^{-2}\,m} \simeq 2{,}2\cdot 10^{-4}$$

↓ */ arányból százalékot számolunk*

$$2{,}2\cdot 10^{-4}\cdot 100\,\% = 2{,}2\cdot 10^{-2}\,\% = 0{,}022\,\%$$

<u>Válasz:</u>

a) 0,02 mm a darab összenyomódása.

b) Ez 0,022 %-os rövidülést jelent.

111. példa

a) Mekkora a fekvő emberben 30 cm hosszúságú sípcsont rövidülése álló helyzetben? Az ember tömegét vegyük 80 kg-nak, a csontot pedig tekintsük egy belül üreges egyszerű csőnek 2,5 cm belső, ill. 3,5 cm külső átmérővel. A csont rugalmassági együtthatója 20 GPa.

b) Mekkora a rövidülés abszolút értékben és százalékosan a törés előtt közvetlenül, ha a sípcsont nyomási szilárdsága 140 MPa?

Adatok:

• nyugalmi hossz:	$L = 30\,cm = 0{,}3\,m = 3\cdot 10^{-1}\,m$	*(szöveg)*
• tömeg:	$m = 80\,kg$	*(szöveg)*
• külső átmérő:	$d_{külső} = 3{,}5\,cm = 0{,}035\,m$	*(szöveg)*
• belső átmérő:	$d_{belső} = 2{,}5\,cm = 0{,}025\,m$	*(szöveg)*
• rugalmassági együttható:	$E = 20\,GPa = 20\cdot 10^{9}\,Pa = 2\cdot 10^{10}\,Pa$	*(szöveg)*
• nyomási szilárdság:	$\sigma = 140\,MPa = 140\cdot 10^{6}\,Pa = 1{,}4\cdot 10^{8}\,Pa$	*(szöveg)*

a)

Elmélet:

1. Kiszámoljuk a 80 kg-os tömeg által kifejtett erőt (nehézségi erő).
2. Kiszámoljuk a nyomott felület nagyságát.
3. A fentiek, illetve a rugalmassági együttható és a nyugalmi hossz ismeretében meghatározzuk a rövidülést (ΔL).

Releváns törvények:

A szilárd testek rugalmasságát a Hooke-törvény írja le:

$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L}$$ *(sajnos nincs benne a képlettárban, így kénytelen leszel megtanulni ☺)*

- F: erő $[N]$
- A: a test keresztmetszete $[m^2]$
- E: rugalmassági együttható $[Pa]$
- ΔL: megnyúlás/rövidülés (hosszváltozás) $[m]$
- L: nyugalmi hossz $[m]$

Az $\frac{F}{A}$ hányados a húzófeszültség (σ), és a $\frac{\Delta L}{L}$ a fajlagos megnyúlás (ε). A két hányados közötti nyomás dimenziójú (Pa) arányossági tényező (E) a Young-féle, vagy rugalmassági modulus. Homogén szerkezetű testek esetében a Young-modulus csak az anyagi minőségre jellemző, és nem függ a test alakjától, méretétől.

$$F_{nehézségi} = m\cdot g$$

- $F_{nehézségi}$: nehézségi erő $[N]$
- m: tömeg $[kg]$
- g: nehézségi gyorsulás $\left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)$

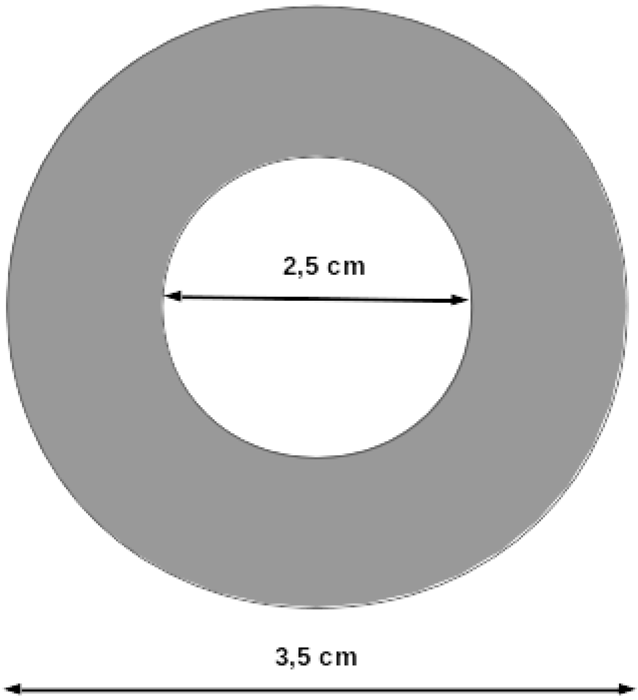
$A = r^2 \cdot \pi$ *(matek)*

- A: kör területe
- r: kör sugara
- π: pi (~3,14)

<u>Számolás:</u>

1. $F_{nehézségi} = m \cdot g = 80\,kg \cdot 9{,}81 \dfrac{m}{s^2} = 784{,}8\,N$

2. Nekünk a külső és a belső körív között található -szürkével satírozott- terület az érdekes, ennek nagyságát kell kiszámolnunk. Ezt a legegyszerűbben úgy tudjuk megtenni, hogy a nagy kör területéből kivonjuk a kis kör területét: $T_{szürke} = T_{külső} - T_{belső}$



$$T_{külső} = r_{külső}{}^2 \cdot \pi = \left(\frac{d_{külső}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \left(\frac{0{,}035\,m}{2}\right)^2 \cdot \pi \simeq 9{,}62 \cdot 10^{-4}\,m^2$$

$$T_{belső} = r_{belső}{}^2 \cdot \pi = \left(\frac{d_{belső}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \left(\frac{0{,}025\,m}{2}\right)^2 \cdot \pi \simeq 4{,}91 \cdot 10^{-4}\,m^2$$

↓

$$T_{szürke} = T_{külső} - T_{belső} = \left(9{,}62 \cdot 10^{-4}\,m^2\right) - \left(4{,}91 \cdot 10^{-4}\,m^2\right) = 4{,}71 \cdot 10^{-4}\,m^2$$

3. A következő törvénynél fontos megemlíteni, hogy keresztmetszetből az összeset kell vennünk. Ez azért van így, mert a nyomóerő a csont mindkét végén kifejti hatását (kvázi „kétszer hat az erő”). Tehát behelyettesítésnél az összes keresztmetszettel $\left(2\cdot 4{,}71\cdot 10^{-4}\,m^2\right)$ számolunk.

$$\frac{F}{A} = E\cdot\frac{\Delta L}{L}$$

↓

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\frac{F}{A}}{E}$$

↓

$$\Delta L = \frac{\frac{F}{A}}{E}\cdot L = \frac{F\cdot L}{E\cdot A} = \frac{(784{,}8\,N)\cdot(0{,}3\,m)}{(2\cdot 10^{10}\,Pa)\cdot(2\cdot 4{,}71\cdot 10^{-4}\,m^2)} \simeq 1{,}25\cdot 10^{-5}\,m = 1{,}25\cdot 10^{-2}\,mm = 0{,}0125\,mm$$

Gondoljuk végig az egyenletet mértékegységekkel is! $1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2}$

$$\Delta L = \frac{F\cdot L}{E\cdot A} = \frac{N\cdot m}{\frac{N}{m^2}\cdot m^2} = m$$

Válasz: 0,0125 mm a sípcsont rövidülése álló helyzetben.

b)

Elmélet:

1. Először kiszámoljuk annak az erőnek a nagyságát, amely fölött a sípcsont már eltörik.
2. Ezután ennek segítségével kiszámoljuk a rövidülés abszolút értékét.
3. Végül ezt vonatkoztatjuk a nyugalmi hosszra, így megkapjuk százalékosan is a rövidülés értékét.

Releváns törvények:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$ *(sajnos nincs benne a képlettárban, így kénytelen leszel megtanulni ☺)*

- σ: nyomási szilárdság $\left[1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2}\right]$
- F: erő $[N]$
- A: a nyomott felület $[m^2]$

$$\frac{F}{A} = E\cdot\frac{\Delta L}{L}$$ *(részleteket lásd fent)*

Számolás:

1. $\sigma = \dfrac{F}{A}$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$F = A \cdot \sigma = \left(9{,}42 \cdot 10^{-4}\, m^2\right) \cdot \left(1{,}4 \cdot 10^{8}\, Pa\right) = 131.880\, N$$

2. $\dfrac{F}{A} = E \cdot \dfrac{\Delta L}{L}$

↓

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\frac{F}{A}}{E}$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\Delta L = \frac{\frac{F}{A}}{E} \cdot L = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} = \frac{\left(131.880\, N\right) \cdot \left(0{,}3\, m\right)}{\left(2 \cdot 10^{10}\, Pa\right) \cdot \left(9{,}42 \cdot 10^{-4}\, m^2\right)} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}\, m = 2{,}1\, mm$$

3. $\dfrac{2{,}1 \cdot 10^{-3} m}{3 \cdot 10^{-1} m} \cdot 100\,\% = 0{,}7\,\%$

Válasz: A rövidülés 2,1 mm (abszolút értékben) törés előtt. Százalékban kifejezve ugyanez 0,7 %.

112. példa

Egy fogszabályozásban használt rugalmas szál hossza 6 cm, keresztmetszete 1 mm², rugalmassági együtthatója 5 MPa. A szálat 40 %-kal megnyújtjuk.

a) Mekkora a visszatérítő erő?

b) Mennyi a szálban tárolt rugalmas energia?

Adatok:

- nyugalmi hossz: $L = 6\,cm = 0{,}06\,m$ *(szöveg)*
- keresztmetszet: $A = 1\,mm^2 = 1\cdot 10^{-6} m^2$ *(szöveg)*
- rugalmassági együttható: $E = 5\,MPa = 5\cdot 10^6\,Pa$ *(szöveg)*
- megnyúlás: 40%

  $\downarrow$

  fajlagos megnyúlás: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = 0{,}4$ *(szöveg)*

Releváns törvények:

A szilárd testek rugalmasságát a Hooke-törvény írja le:

$$\frac{F}{A} = E\cdot \frac{\Delta L}{L}$$ *(sajnos nincs benne a képlettárban, így kénytelen leszel megtanulni ☺)*

- F: erő $[N]$
- A: a test keresztmetszete $[m^2]$
- E: rugalmassági együttható $[Pa]$
- ΔL: megnyúlás/rövidülés (hosszváltozás) $[m]$
- L: nyugalmi hossz $[m]$

Az $\frac{F}{A}$ hányados a húzófeszültség (σ), és a $\frac{\Delta L}{L}$ a fajlagos megnyúlás (ε). A két hányados közötti nyomás dimenziójú (Pa) arányossági tényező (E) a Young-féle, vagy rugalmassági modulus. Homogén szerkezetű testek esetében a Young-modulus csak az anyagi minőségre jellemző, és nem függ a test alakjától, méretétől.

Számolás:

a)

$$\frac{F}{A} = E\cdot \frac{\Delta L}{L}$$

$\downarrow$ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$F = A\cdot E\cdot \frac{\Delta L}{L} = 1\cdot 10^{-6}\,m^2\cdot 5\cdot 10^6\,Pa\cdot 0{,}4 = 2\,N$$

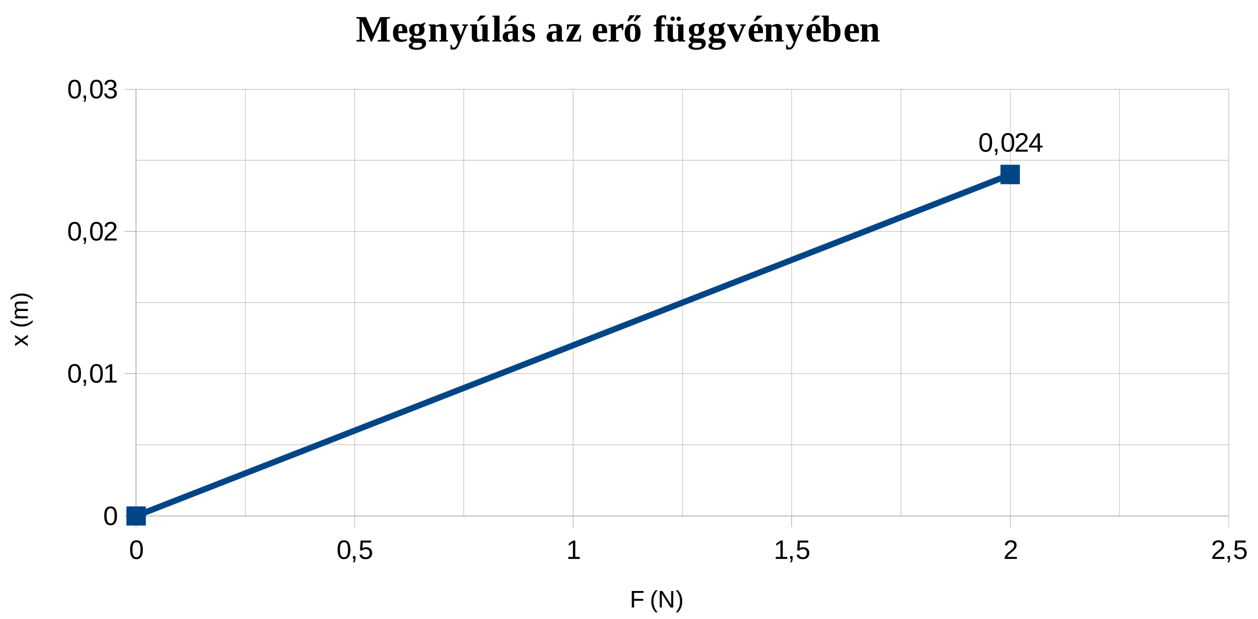
b)

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

↓ */ átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L = 0{,}4 \cdot 0{,}06\,m = 0{,}024\,m$$

A rugalmas energia megegyezik a vonal alatti területtel a következő grafikonon.



$$E_{rugalmas} = \frac{F \cdot x}{2} = \frac{2\,N \cdot 0{,}024\,m}{2} = 0{,}024\,J = 24 \cdot 10^{-3}\,J = 24\,mJ$$

A feladat jól rávilágít arra, hogy $munka_{mechanikai} = erő \cdot elmozdulás$. Mivel az erő nem állandó (folyamatosan növekszik), így le kell osztani 2-vel $\left(T_{téglalap} \rightarrow T_{háromszög}\right)$.

<u>Válasz:</u>

a) 2 N a visszatérítő erő.

b) 24 mJ a rugalmas energia.

Képlettár

I. Az „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban

$$h\,f = E_m - E_i \qquad \text{(I.1)}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v} \qquad \text{(I.3)}$$

$$\Delta M = \left[Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n\right] - M(A, Z)$$

$$E = m\,c^2 \qquad \text{(I.19)}$$

$$n_i = n_0\, e^{-\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{k\,T}} \qquad R = N_A k \qquad \text{(I.25)}$$

$$\bar{\varepsilon}_{mozgási} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k\,T \qquad \text{(I.34)}$$

$$p\,V = N\,k\,T \qquad \text{(I.35)}$$

II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal

$$M = \frac{\Delta P}{\Delta A} \qquad \text{(II.2)}$$

$$E_{be} = \frac{\Delta P}{\Delta A} \qquad \sim \frac{1}{r^2}, \quad \sim \frac{1}{r} \qquad \text{(II.3)}$$

$$J_E = \frac{\Delta E}{\Delta t\, \Delta A} \qquad \text{a továbbiakban } J \qquad \text{(II.5)}$$

$$\Delta J = -\mu\, \Delta x\, J \qquad \text{(II.10)}$$

$$J = J_0 e^{-\mu x} \qquad \mu = \frac{1}{\delta} \qquad \text{(II.11)}$$

$$J = J_0 2^{-\frac{x}{D}} \qquad \text{(II.12)}$$

$$\mu = \frac{\ln 2}{D} \qquad \text{(II.13)}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21} \qquad \text{(II.14)}$$

$$D = \frac{n_2 - n_1}{r} \qquad \text{(II.17)}$$

$$D = D_1 + D_2 \qquad \text{(II.21)}$$

$$c = \frac{\lambda}{t}, \qquad \text{illetve} \qquad c = \lambda \cdot f \qquad \text{(II.26)}$$

$$J \sim A^2 \qquad \text{(II.27)}$$

$$J_1 + J_2 \neq J_{eredő} \qquad \text{(II.28)}$$

$$E_{mozgási} = h\,f - W_{ki} \qquad \text{(II.37)}$$

$$\frac{M_{\lambda_i}}{\alpha_{\lambda_i}} = \frac{M_{\lambda_j}}{\alpha_{\lambda_j}} \qquad \text{(II.39)}$$

$$M_{fekete}(T) = \sigma T^4 \qquad \text{(II.41)}$$

$$\Delta M = \sigma\left(T_{test}^{\ 4} - T_{környezet}^{\ 4}\right)$$

$$\lambda_{max} T = állandó \qquad \text{(II.42)}$$

$$\mu = K(N_1 - N_2) \qquad \text{(II.56)}$$

$$P_{szórt} \sim \frac{p_0^{\ 2}}{c^3} \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4} \qquad \text{(II.60)}$$

$$\kappa = \frac{\frac{-\Delta V}{V}}{\Delta p} \qquad \text{(II.63)}$$

$$Z = c\rho \qquad \text{(II.67)}$$

$$R = \frac{J_R}{J_0} \qquad \text{(II.76)}$$

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \qquad \text{(II.77)}$$

$$eU_{anód} = \varepsilon_{max} = h\,f_{max} \qquad \text{(II.79)}$$

$$\lambda_{min} = \frac{h\,c}{eU_{anód}} \qquad \text{(II.80)}$$

$$P_{Rtg} = c_{Rtg} U_{anód}^{\ 2} Z\, I_{anód} = \eta U_{anód} I_{anód} \qquad \text{(II.82)}$$

$\mu = \mu_m \rho \qquad x_m = \rho x$ (II.85)

$\varepsilon = h f = E_{kötési} + E_{mozgási}$ (II.86)

$\tau_m = \frac{\tau}{\rho} = C_{foto} \lambda^3 Z^3$ (II.87)

$h f = E_{kötési} + h f' + E_{mozgási}$ (II.89)

$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$ (II.95)

$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \lambda = \frac{1}{\tau}$ (II.96)

$\lambda T = \ln 2 \qquad \frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{T_{fiz}} + \frac{1}{T_{biol}}$ (II.98)

$\Lambda = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$ (II.99)

$\Lambda = \Lambda_0 e^{-\lambda t}$ (II.101)

$\mu = \tau + \sigma + \kappa \qquad s = \frac{\Delta E}{\Delta x} \qquad s = s_m \rho$ (II.102)

$h f = 2 m_e c^2 + 2 E_{mozgási}$ (II.103)

$D = \frac{\Delta E}{\Delta M} \qquad D_{levegő} = K_\gamma \frac{\Delta t}{r^2}$ (II.105)

$x = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ (II.106)

$D_{levegő} = f_0 X$ (II.107)

$D \sim \mu_m J$, illetve $D \sim s_m$

$H_T = \sum_R w_R D_{TR}$ (II.108)

$E = \sum_T w_T H_T$ (II.110)

$S = \sum_i N_i E_i$ (II.111)

III. Transzportjelenségek élő rendszerekben

$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{c \Delta t}$ (III.1)

$I_V = A \overline{\upsilon} = állandó$ (III.4)

$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = állandó$ (III.5)

$F = \eta A \frac{\Delta \upsilon}{\Delta h}$ (III.6)

$I_V = -\frac{\pi}{8\eta} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l}$ (III.12)

$R_{cső} = 8 \Pi \eta \frac{\Delta l}{\left(r^2 \pi\right)^2}$ (III.14)

$\upsilon_{krit} = R_e \frac{\eta}{\rho r}$ (III.17)

$F = 6 \pi \eta r \upsilon$ (III.18)

$u = \frac{\upsilon}{F}$ (III.19)

$l = \overline{\upsilon} \tau$ (III.25)

$\upsilon_{drift} = \frac{F}{m} \tau$ (III.26)

$I_N = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ (III.28)

$I_v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (III.29)

$J_v = \frac{\Delta I_v}{\Delta A}$ (III.30)

$J_v = -D \frac{\Delta c}{\Delta x}$ (III.31)

$D = \frac{1}{3} \upsilon l = u k T$ (III.33)

$$-\frac{\Delta J_V}{\Delta x} = \frac{\Delta c}{\Delta t} \qquad \text{(III.38)}$$

$$D\frac{\Delta\left(\frac{\Delta c}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta c}{\Delta t} \qquad \text{(III.39)}$$

$$\sigma_x \sim \overline{R(t)} \sim \sqrt{Dt} \qquad \text{(III.40)}$$

$$p_{ozmózis} = cRt \qquad \text{(III.50)}$$

$$J_V = -L_T \frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad \text{(III.51)}$$

$$J_E = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad \text{(III.53)}$$

$$J = LX \qquad J = \frac{\Delta x_{kül}}{A \Delta t} \qquad X = -\frac{\Delta y_{bel}}{\Delta x} \qquad \text{(III.54)}$$

$$\Delta E = Q_E + W \qquad Q_E = cm\Delta T \qquad \text{(III.56)}$$

$$W_V = -p\Delta V \qquad W_Q = \phi \Delta Q \qquad W_V = \mu \Delta v$$

↑

(III.58)

$$W^{(i)} = y_{bel}{}^{(i)} \Delta x_{kül}{}^{(i)} \qquad \text{(III.59)}$$

$$W_{vQ} = W_V + W_Q = (\mu + zF\phi)\Delta v = \mu_e \Delta v$$

↑

(III.61)

$$Q_E = T\Delta S \qquad \text{(III.63)}$$

$$\Delta E = \sum_{(i)} y_{bel}{}^{(i)} \Delta x_{kül}{}^{(i)} \qquad \text{(III.64)}$$

$$\Delta S = \frac{\Delta E_1}{T_1} + \frac{\Delta E_2}{T_2} = \Delta E\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \qquad \text{(III.67)}$$

$$S = k \ln \Omega \qquad \text{(III.72)}$$

$$E = TS - pV + \mu v \qquad \text{(III.83)}$$

$$H = E + pV \qquad \text{(III.84)}$$

$$\Delta H_p = Q_E + W_V \qquad \text{(III.87)}$$

$$\Delta H_{p,v} = Q_E \qquad \text{(III.88)}$$

$$F = E - TS \qquad \text{(III.89)}$$

$$\Delta F_T = W_V + W_v \qquad \text{(III.91)}$$

$$\Delta F_{T,v} = W_V \qquad \text{(III.92)}$$

$$\Delta F_{T,V} = W_v \qquad \text{(III.93)}$$

$$G = H - TS \qquad \text{(III.94)}$$

$$\Delta G_{T,p} = W_v \qquad \text{(III.96)}$$

$$\Delta G_{T,p} \leq 0 \qquad \text{(III.99)}$$

$$\Delta F_{T,V} \leq 0 \qquad \text{(III.100)}$$

$$\Delta H_{S,p} \leq 0 \qquad \text{(III.101)}$$

$$G = \mu_A v_A + \mu_B v_B \qquad \text{(III.105)}$$

$$\mu_A = \mu^0{}_A + RT \ln(c_A) \qquad \text{(III.109)}$$

$$J_m = -p\left(c_{v_2} - c_{v_1}\right) \qquad \text{(III.113)}$$

$$J_k = -L_K \frac{\Delta \mu_e}{\Delta x} \qquad \text{(III.116)}$$

$$L_k = c_k \frac{D_k}{RT} = \frac{c_k u_k}{N_A} \qquad \text{(III.118)}$$

$$J_k = -D_K\left(\frac{\Delta c_k}{\Delta x} + c_k \frac{z_k F}{RT}\frac{\Delta \phi}{\Delta x}\right) \qquad \text{(III.119)}$$

$$U = \frac{RT}{F} \ln \frac{\sum_{k=1}^{m} p_k{}^{+} c_{k,II}{}^{+} + \sum_{k=1}^{n} p_k{}^{-} c_{k,I}{}^{-}}{\sum_{k=1}^{m} p_k{}^{+} c_{k,I}{}^{+} + \sum_{k=1}^{n} p_k{}^{-} c_{k,II}{}^{-}}$$

↑

(III.121)

$$U = \phi^{II} - \phi^{I} = \frac{RT}{z_i F} \ln \frac{c_i{}^{I}}{c_i{}^{II}} \qquad \text{(III.123)}$$

$$U_m(t) = U_t\left(1 - e^{-\frac{t}{R_M C_M}}\right) \qquad \text{(III.130)}$$

$$U_m(t) = U_t e^{-\frac{t}{R_M C_M}} \qquad \text{(III.132)}$$

$$U_m(x) - U_m(0) = U_t e^{-\frac{x}{\lambda}} \qquad \text{(III.133)}$$

IV. Az érzékszervek biofizikája

$$\Delta \psi \sim \frac{\Delta \Phi}{\Phi} \quad \text{(IV.5)}$$

$$\psi \sim \log \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \text{(IV.6)}$$

$$\frac{\Delta \psi}{\psi} \sim \frac{\Delta \Phi}{\Phi} \quad \text{(IV.7)}$$

$$\psi \sim \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^n \quad \text{(IV.8)}$$

$$n_{oktáv} = \log_2 \frac{f_2}{f_1} \quad \text{(IV.22)}$$

$$n = 10\, lg \left(\frac{J_1}{J_2}\right) \quad \text{(IV.25)}$$

$$n = 10\, lg \left(\frac{P_{ki}}{P_{be}}\right) = 10\, lg \left(\frac{J_{ki}}{J_{be}}\right) \quad \text{(IV.26)}$$

$$n = n_{erősítés} + n_{csillapítás} \quad \text{(IV.27)}$$

$$H_{phon} = 10\, lg \left(\frac{J}{J_0}\right) \quad \text{(IV.29)}$$

$$H_{son} = \frac{1}{16} \left(\frac{J}{J_0}\right)^{0,3} \quad \text{(IV.31)}$$

VI. A molekuláris és sejtdiagnosztika fizikai módszerei

$$N_{szög} = \frac{tg\, \beta}{tg\, \alpha} = \alpha \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{k}\right) \quad \text{(VI.18)}$$

$$N_{szög} = -\frac{da}{f_1 f_2} \quad \text{(VI.23)}$$

$$\Delta s = d \sin \alpha_k = k \lambda \quad \text{(VI.24)}$$

$$\delta = 0{,}61 \frac{\lambda}{n \sin \omega} \qquad f = \frac{1}{\delta} \quad \text{(VI.28)}$$

$$A = lg \left(\frac{J_0}{J}\right) = \varepsilon(\lambda)\, c\, x \quad \text{(VI.34)}$$

$$N = N_0 e^{-(k_f + k_{nr})t} \quad \text{(VI.39)}$$

$$\tau = \frac{1}{k_f + k_{nr}} \quad \text{(VI.40)}$$

$$Q_f = k_f\, \tau \quad \text{(VI.41)}$$

$$p = \frac{J_{VV} - J_{VH}}{J_{VV} + J_{VH}} \quad \text{(VI.43)}$$

VII. Elektromos jelek és módszerek az orvosi gyakorlatban

$$U_R = U_T e^{-\frac{t}{RC}} \qquad U_C = U_T \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \text{(VII.2)}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi\, f\, C} \quad \text{(VII.4)}$$

$$U_{ki} = U_{be} \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^{\,2}}} \qquad f_h = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{(VII.5)}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

$$K_U = \frac{U_{ki}}{U_{be}} \qquad K_P = \frac{P_{ki}}{P_{be}} \quad \text{(VII.6)}$$

$$K_P = K_U^{\,2} \quad \text{ha} \quad R_{ki} = R_{be} \quad \text{(VII.8)}$$

$$n = 10\, lg\, K_P = 20\, lg\, K_U \quad \text{(VII.10)}$$

$$U_{ki} = \left(U_{be1} - U_{be2}\right) K_U \quad \text{(VII.11)}$$

$$K_{U_V} = \frac{K_U}{1 - K_{VU} K_U} \qquad K_{V_U} = \frac{U_{vissza}}{U_{ki}} \quad \text{(VII.14)}$$

VIII. Képalkotó módszerek

$$lg\frac{J_0}{J} = (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \ldots) lg\, e \qquad \text{(VIII.2)}$$

$$h f_0 = g_N \mu_N H_0 \qquad \text{(VIII.3)}$$

$$f' = f\left(1 \pm \frac{\upsilon}{c}\right) \qquad \text{(VIII.4)}$$

$$f_D = f' - f = \frac{\pm\upsilon}{c} f \qquad f_D = \frac{\pm 2\upsilon}{c} f \qquad \text{(VIII.5)}$$

$$HU = \frac{\mu - \mu_{víz}}{\mu_{víz}} 1000 \qquad \text{(VIII.10)}$$

IX. Terápiás módszerek fizikai alapjai

$$a_{küszöb} = \frac{q}{\tau} + r$$

$$2r = \frac{q}{C} + r$$

Statisztika és informatika

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

$$P(n,x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (2)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{Q_x}{n-1}} \qquad (4)$$

$$Q_x \equiv Q_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} \qquad (6)$$

$$Q_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (8)$$

$$Q_h(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a x_i + b)]^2 \qquad (16)$$

$$a^* = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}} \qquad (17)$$

$$b^* = \bar{y} - a^* \bar{x} \qquad (18)$$

$$r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x Q_y}} \qquad (19)$$

$$t_{[n-1]} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} \qquad (20)$$

$$t_{[n-1]} = \frac{\bar{R} - 0}{s/\sqrt{n}}$$

$$t_{[n_1+n_2-2]} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{Q_1 + Q_2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \qquad (21)$$

$$t_{[n-2]} = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \qquad (22)$$

$$F = \frac{s_{nagyobb}^{\;2}}{s_{kisebb}^{\;2}}$$

$$z = \frac{|x - np| - 1/2}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$\chi_{[1]}^{\;2} = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \qquad (23)$$

$$\chi^2 = \sum \left[\frac{(O-E)^2}{E} \right] \quad (24)$$

$$z = \frac{T_1 - n_1(n_1+n_2+1)/2}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)/12}}$$

$$SS_A = \sum_j n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$

$$MS_A = \frac{SS_A}{j-1}$$

$$SS_E = SS_T - SS_A$$

$$SS_T = \sum_{i,j} (x_{i,j} - \bar{x})^2$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{N-j}$$

$$F = \frac{MS_A}{MS_E}$$

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_i \frac{R_i^{\ 2}}{n_i} - 3(N+1)$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} d_i^{\ 2}}{n(n^2-1)} \quad (25)$$

$$RR = \frac{a/(a+b)}{c/(c+d)} = \frac{a(c+d)}{c(a+b)} \quad (26)$$

$$SE(\ln RR) = \sqrt{\frac{1-a/(a+b)}{a} + \frac{1-c/(c+d)}{c}} \quad (27)$$

$$\mathrm{OR} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc} \quad (28)$$

$$SE(\ln \mathrm{OR}) = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \quad (29)$$

$$se = \frac{VP}{VP + ÁN}$$

$$sp = \frac{VN}{VN + ÁP}$$

$$PPV = \frac{VP}{VP + ÁP}$$

$$NPV = \frac{VN}{VN + ÁN}$$

$$de = \frac{VP + VN}{VP + ÁP + VN + ÁN}$$

$$w = \frac{VP + ÁN}{VP + ÁP + VN + ÁN}$$

$$I = \sum_{k=1}^{m} n_k I_k = -\sum_{k=1}^{m} [n_k \cdot \log_2(p_k)]$$

$$H = \bar{I} = -\sum_{k=1}^{m} [p_k \cdot \log_2(p_k)]$$

Gyakorlatok

MIKROSZKÓP

$$D = \frac{1}{f} = (n_{21}-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \quad (2)\ (II.23)$$

$$N_{szög} = -\frac{da}{f_1 f_2} \quad (VI.23)$$

SPECIÁLIS MIKROSZKÓPOK

$$\Delta s = d \sin \alpha_k = k \lambda \quad (1)\ (VI.24)$$

$$\delta = 0{,}61 \frac{\lambda}{n \sin \omega} \quad (3)\ (VI.28)$$

REFRAKTOMÉTER

$$\frac{1}{\sin \beta_h} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (5)$$

$$n = n_0 + Kc \quad (7)$$

FÉNYEMISSZIÓ

$$\lambda_{max} T = \text{állandó} \quad (II.42)$$

$$hf = E_j - E_i \quad (I.1)$$

FÉNYABSZORPCIÓ

$$T = \frac{J}{J_0}(100\,\%) \quad (2)$$

$$A = lg\left(\frac{J_0}{J}\right) = \varepsilon(\lambda) c x \quad (7)\ (VI.34)$$

A SZEM OPTIKÁJA

$$D = \frac{n}{t} + \frac{n'}{k} \quad (1)\ (II.18)$$

$$\Delta D = D_p - D_r = \frac{1}{t_p} - \frac{1}{t_r} \quad (4)$$

$$\text{látásélesség}(\text{visus}) = \frac{1(')}{\alpha(')}\% \quad (6)$$

$$\alpha(') \approx \frac{a}{x}(rad) \frac{360(o)}{2\pi(rad)} 60\left(\frac{'}{o}\right) \quad (7)$$

$$\alpha' = \frac{17\,\alpha}{x}(mm) \quad (8)$$

$$\text{receptorsűrűség} \approx \frac{1}{(\alpha')^2}\left(\frac{1}{mm^2}\right) \quad (9)$$

$$d_1' = 17\frac{d}{x_1}(mm) \qquad d_2' = 17\frac{d}{x_2}(mm) \quad (11)$$

NUKLEÁRIS MÉRÉSTECHNIKA

$$N_j = N_{j+z} - N_z \quad (2)$$

GAMMA ABSZORPCIÓ

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{2} = e^{-\mu D} \quad (2)$$

$$x_{1/10} = 3{,}33\,D \quad (5)$$

$$\mu = \frac{ln2}{D} \quad (II.13)\ (3)$$

$$\mu = \mu_m \rho \qquad D_m = \rho D \quad (II.85)$$

$$\mu_m = \tau_m + \sigma_m + \kappa_M \quad (10)$$

GAMMA ENERGIA

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{U_1}{U_2} \quad (1)$$

IZOTÓPDIAGNOSZTIKA

$$\frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{T_{fiz}} + \frac{1}{T_{biol}} \quad (1)$$

RÖNTGEN – CT

$$D_i = lg\frac{J_{i_0}}{J_i} = lg\, e \cdot \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} \Delta x \quad (6)$$

DOZIMETRIA

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta m} \qquad (1\ \text{rad} = 0{,}01\ \text{J/kg}) \qquad (1)$$

$$X = \frac{\Delta q}{\Delta m} \qquad (1\ \text{R} = 2{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{C/kg}) \qquad (2)$$

$$D_{levegő} = f_0 X \qquad (3)\ (\text{II}.107)$$

$$D_{levegő} = K_\gamma \frac{\Lambda t}{r^2} \qquad (8)$$

$$U = \frac{Q}{C} \sim X \qquad (10)$$

$$U = IR = \frac{Q}{t} R \sim \frac{X}{t} \qquad (11)$$

$$P_{Rtg} = c_{Rtg} U_{anód}{}^2 Z\, I_{anód} \qquad (\text{II}.82)$$

UV - DOZIMETRIA

$$E_{be} = \frac{\Delta P}{\Delta A} \qquad (1)\ (\text{II}.3)$$

$$H = S\, E\, t \qquad (2)$$

$$A(t) = A_\infty + (A_0 - A_\infty)\, e^{-H_U} \qquad (5)$$

$$H_U = \ln \frac{A_0 - A_\infty}{A(t) - A_\infty} \qquad (6)$$

OSZCILLOSZKÓP

$$U_{pp} = 2 U_{max} = 2\sqrt{2}\, U_{eff} \qquad (5)$$

ERŐSÍTŐ

$$K_U = \frac{U_{ki}}{U_{be}} \qquad K_P = \frac{P_{ki}}{P_{be}} \qquad (3)\ (\text{VII}.6)$$

$$n = 20\, lg\, K_U + 10\, lg \frac{R_{be}}{R_{ki}} \quad (dB) \qquad (6)$$

SZINUSZOSZCILLÁTOR

$$K_{U_v} = \frac{K_U}{1 - K_v K_U} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (3)(\text{VII}.14)$$

$$Q = \sigma E^2 V t \qquad (4)$$

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \qquad Z = c\rho \qquad (5)\ (\text{II}.77)$$

IMPULZUSGENERÁTOR

$$T = \tau_1 + \tau_2 \qquad (2)$$

$$kitöltési\ tényező = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} 100\,\% \qquad (3)$$

COULTER SZÁMLÁLÓ

$$h = \frac{c_{megadott}}{c_{mért}} \qquad (1)$$

BŐRIMPEDANCIA

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \qquad (13)$$

$$\rho = RA \qquad (14)$$

$$C = \frac{1}{2\pi f Z} \qquad (15)$$

$$\gamma = \frac{C}{A} \qquad (16)$$

AUDIOMETRIA

$$J = \eta \frac{U_{eff}{}^2}{R} \qquad (1)$$

$$J_{saját} = A U^2 \qquad (2)$$

$$n = 10\, lg \left(\frac{J}{J_0}\right) \qquad (5)$$

SZENZOR

$$\psi \sim \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^n \qquad \text{(IV.8)}$$

EKG

$$U_{ki} = \left(U_{be_1} - U_{be_2}\right) K_U \qquad \text{(VII.11)}$$

$$U_I = \phi_L - \phi_R$$

$$U_{II} = \phi_F - \phi_R$$

$$U_{III} = \phi_F - \phi_L$$

ÁRAMLÁS

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = I_V = -\frac{\pi}{8\eta} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l} \qquad \text{(3) (III.12)}$$

$$\eta = \frac{\pi}{8} \frac{R^4}{\Delta V} \frac{\overline{\Delta h} \rho g}{l} \Delta t \qquad \text{(11)}$$

$$\Delta p = R_{cső} I_V \qquad \left(U = RI\right)$$

$$R_{cső} = 8 \pi \eta \frac{l}{A^2} \qquad \text{(6)}$$

$$R_{párhuzamos\,eredő} = \frac{R}{n} \qquad \text{(7)}$$

DIFFÚZIÓ

$$D \Delta t \frac{\Delta\left(\frac{\Delta c}{\Delta x}\right)}{\Delta x} + c(t) = c(t + \Delta t) \qquad \text{(4)}$$

$$v = K v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \left(T = ln2 \cdot \tau\right) \qquad \text{(5)}$$

$$D = 0{,}12 \frac{r^2}{T} \qquad \text{(8)}$$

$$\sigma_{elektrolit} = \frac{1}{R} C \qquad \text{(12)}$$

A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggések

$$E_{magassági} = mgh$$

$$E_{mozgási} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{kondenzátor} = \frac{1}{2} C U^2$$

$$\varepsilon = hf$$

$$n = \frac{c_{vákuum}}{c_{közeg}}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$$

$$X_L = 2 \pi f L$$

$$X_C = \frac{1}{2 \pi f C}$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{A}{d}$$

$$P_{elektromos} = UI$$

$$Q = c m \Delta t$$

Statisztikai táblázatok

t-eloszlás

szabadságfok	*p* (valószínűség, kétoldalú próba)							
	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	1,00	3,08	6,31	12,7	31,8	63,7	318,3	636,6
2	0,82	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	22,3	31,6
3	0,76	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	10,2	12,9
4	0,74	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	0,73	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	5,89	6,87
6	0,72	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	0,71	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	0,71	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	0,70	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	0,70	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	0,70	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	0,70	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	0,69	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	0,69	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	0,69	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	0,69	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	0,69	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	0,69	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	0,69	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	0,69	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	0,69	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	0,69	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	0,69	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	0,68	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	0,68	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	0,68	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	0,68	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	0,68	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	0,68	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	0,68	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	0,68	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	0,68	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	0,68	1,30	1,66	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	0,68	1,29	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

χ^2 (khi-négyzet)-eloszlás

szabadságfok	p (valószínűség)						
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,0201	0,0506	0,103	5,99	7,88	9,21	13,82
3	0,115	0,216	0,352	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,297	0,484	0,711	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,554	0,831	1,15	11,07	12,83	15,09	20,51
6	0,872	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,61	4,57	19,68	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	26,33	28,85	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	28,87	31,53	34,81	42,31
19	7,63	8,91	10,12	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	31,41	34,17	37,57	45,31
21	8,90	10,28	11,59	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	36,42	39,36	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	38,89	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,56	15,31	16,93	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	43,77	46,98	50,89	59,70
40	22,16	24,43	26,51	55,76	59,34	63,69	73,40
50	29,71	32,36	34,76	67,51	71,42	76,15	86,66
60	37,48	40,48	43,19	79,08	83,30	88,38	99,61
100	70,06	74,22	77,93	124,3	129,5	135,8	149,4

Állandók és adatok

egyetemes gázállandó	$R = 8,31\ J/(mol \cdot K)$
Avogadro-szám	$N_A = 6 \cdot 10^{23}\ /mol$
Boltzmann-állandó	$k = 1,38 \cdot 10^{-23}\ J/K$
Faraday-állandó	$F = 96500\ C/mol$
Planck-állandó	$h = 6,6 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$
fénysebesség (vákuumban)	$c = 3 \cdot 10^{8}\ m/s$
elektron töltése (elemi töltés)	$e = 1,6 \cdot 10^{-19}\ C$
elektron nyugalmi tömege	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\ kg$
proton nyugalmi tömege	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}\ kg$
neutron nyugalmi tömege	$m_n = 1,675\ 10^{-27}\ kg$
Stefan-Boltzmann állandó	$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}\ J/(m^2 \cdot K^4 \cdot s)$
Reynolds-szám (sima falú csövekre)	$R_e = 1160$
c_{Rtg}	$1,1 \cdot 10^{-9}\ V^{-1}$
C_{foto}	$6\ cm^2/(g \cdot nm^3)$
f_0	$34\ J/C$

relatív atomtömeg	
nitrogén:	14
oxigén:	16
sűrűség [kg/m³]	
alumínium (Al):	$2,7 \cdot 10^3$
vas (Fe):	$7,9 \cdot 10^3$
ólom (Pb):	$11,3 \cdot 10^3$
testszövet (lágy):	$1,04 \cdot 10^3$
vér (átlagos):	$1,05 \cdot 10^3$
levegő (0 ºC, 101 kPa):	1,29
csont:	$1,7 \cdot 10^3$
zsírszövet:	$0,92 \cdot 10^3$
viszkozitás [mPa·s]	
víz (27ºC-on):	0,85
vér (37ºC-on):	4,5
fajhő [kJ/(kg·K)]	
víz:	4,18
izom:	3,76
vér:	3,9
tömör csont:	1,3
zsírszövet:	3
testszövet	3,5

fajhő [kJ/(kg·K)]	
oxigén: c_v	0,65
oxigén: c_p	0,92
olvadáshő [kJ/kg)	
jég:	334,4
párolgáshő [kJ/kg]	
víz (100 ºC, 101 kPa):	2257
standard kémiai potenciál [kJ/mol]	
glükóz:	-902,5
törésmutató	
levegő:	1
víz:	1,333
cédrusolaj:	1,505
tömeggyengítési együttható [cm²/g]	
μ_m (^{24}Na, ólom absz.):	$5 \cdot 10^{-2}$
hallásküszöb [W/m²]	
emberi fül (1 kHz-en):	10^{-12}
hangsebesség [m/s]	
testszövet (lágy):	1600
csont:	3600
fajlagos vezetőképesség [S/m]	
izomszövet:	0,8

A fontosabb radioaktív izotópok jellemző adatai

kémiai elem és rendszáma		**izotóp**	**felezési idő**	**bomlás módja**	**maximális részecske energiák** (MeV)	**γ-energia** (MeV)	**Kγ dózis-konstans** $\left(\frac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}\right)$
hidrogén	1	^{3}H	12,33 év	β^-	0,0186	—	
szén	6	^{11}C ^{14}C	20,4 perc 5760 év	β^+ β^-	0,96 0,155	—	
nitrogén	7	^{13}N	10 perc	β^+	1,19	—	
oxigén	8	^{15}O	2 perc	β^+	1,73	—	
fluor	9	^{18}F	109,8 perc	β^+	0,633	—	
nátrium	11	^{24}Na	15,02 óra	β^-, γ	1,392	2,754 1,369	444
foszfor	15	^{32}P	14,28 nap	β^-	1,710	—	
kén	16	^{35}S	87,2 nap	β^-	0,167	—	
kálium	19	^{40}K ^{42}K	$1{,}28\cdot 10^9$ év 12,36 óra	β^-, K (10 %) β^-, γ	1,31 3,52 (75 %) 1,99 (25 %)	1,46 K után 1,525	
kalcium	20	^{45}Ca	163 nap	β^-	0,257	—	
króm	24	^{51}Cr	27,7 nap	K, e^-, γ	0,315 (e^-)	0,320	
vas	26	^{52}Fe ^{59}Fe	8,2 óra 44,6 nap	β^+, γ β^-, γ	0,8 1,566	0,5 1,30 1,10	160
kobalt	27	^{60}Co	5,272 év	β^-, γ	0,318	1,33 1,17	305
réz	29	^{64}Cu	12,74 óra	β^- (39 %) β^+ (19 %) K (42 %) γ (1 %)	0,575 0,656	 1,34	
kripton	36	^{85}Kr	10,73 év	β^-, γ	0,687	0,514	
rubídium	37	^{81}Rb ^{86}Rb	4,7 óra 18,65 nap	β^+, γ β^-, γ	0,99 1,78	1,93 0,95 1,078	
stroncium	38	^{90}Sr	29 év	β^-	0,546	—	
ittrium	39	^{90}Y	64 óra	β^-, γ (0,4 %)	2,29	1,760	
technécium	43	$^{99}Tc^m$	6,02 óra	γ	—	0,140	
indium	49	$^{113}In^m$	1,658 óra	γ	—	0,91	
jód	53	^{123}I ^{125}I ^{131}I	13,3 óra 59,7 nap 8,04 nap	K, γ K, γ β^-, γ	— — 0,606 0,25 0,81	0,16 0,0355 0,364 0,080 0,723	54
xenon	54	^{133}Xe	5,29 nap	β^-, γ	0,346	0,081	
cézium	55	^{137}Cs	30,1 év	β^-, γ	0,512 (92,6 %) 1,173 (7,4 %)	0,661	80
arany	79	^{198}Au	2,695 nap	β^-, γ	0,961	0,411	
higany	80	^{203}Hg	46,6 nap	β^-, γ	0,212	0,279	
radon	86	^{222}Rn	3,824 nap	α	5,489	—	
rádium	88	^{226}Ra	1600 év	α, γ *(6 %)*	4,784 4,598	0,186 0,260 0,609	
urán	92	^{238}U	$4{,}47\cdot 10^9$ év	α, γ	4,2	0,048	

Stáblista

Az alábbi személyek járultak hozzá észrevételükkel/meglátásukkal/munkájukkal e jegyzet létrejöttéhez:

- *Pánczél Áron*

Köszönet nekik a befektetett energiáért, segítő szándékukért! Nélkülük nem jöhetett volna létre ez a mű.

További források:

- *Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet* http://biofiz.semmelweis.hu
- *SotePedia* http://sotepedia.hu
- *Wikipedia* http://hu.wikipedia.org és http://en.wikipedia.org

Pink Floyd: The Dark Side of the Moon *(cover)*