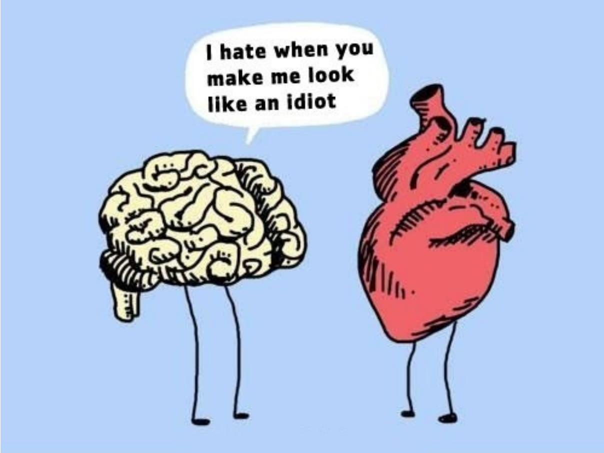
Orvosi biofizika - számolási példák

jegyzet

Tartalom

Előszó



„Az idő lassan elszivárog,
nem lógok a mesék tején,
hörpintek valódi világot,
habzó éggel a tetején.”

József Attila: Ars poetica (részlet)

Kedves Olvasó!

Mikor 1. évfolyamos orvostanhallgatóként először találkoztam az „Orvosi biofizika” nevű tantárggyal, gyorsan a szívembe zártam. Ez messze nem azt jelentette, hogy már az elején könnyen ment, de az előadások érdekesek voltak, a gyakorlatokon szinte mindig kijöttek az előzetesen várt eredmények, és nem utolsósorban az Intézet (Biofizikai és Sugárbiológiai Intézet) összes dolgozója közvetlen és emberséges volt hozzám. Éreztem, hogy engem ez az egész érdekel, mert rólam szól. Szeretem ebben a tárgyban, hogy összefüggésekre épül, és ha az alapokat rendesen megtanulja valaki, akkor láthatóvá válik valami nagyobb, ami több is lehet, mint a részek összege. Aki gimnáziumban szerette a matematikát és/vagy a fizikát, annak ez a tárgy más lesz, mint a többi orvosi tárgy. Itt lehet logikázni, számolni, számítógéppel mérési eredményeket ábrázolni. Szóval lehet valami mást is csinálni, mint winchesterest játszani … Nekem ezért volt üdítő kivétel.

Demóra készülve szembesültem azzal, hogy a jegyzet végén lévő „Feladatok”-ban csak az eredmények voltak leírva, a megoldás menete nem. A keleti világ megismerése óta tudjuk, hogy *az út maga a jutalom*, így nem elégedhettem meg ennyivel. (Arról nem beszélve, hogy egy-két kivételtől eltekintve azt sem tudtam, hogyan fogjak neki a példáknak …) Ismerősöktől kaptam ilyen-olyan kézi és gépi anyagokat, valamint a SotePedián is voltak fent használható dolgok. Az egyetem elején gyorsan rájön a hallgató (+ajándék, egy kiváló esszé téma: „Hogyan lesz a diákból hallgató?” Mostantól nem kérdezhet, csak hallgathat? Hm? ♬ Valaki mondja meg!) hogy milyen sok múlik azon, miből és hogyan tanul. Azt hiszem, ha csak eggyel kevesebb „Miből?” kérdés hangzik el, már megérte ez a néhány oldal a befektetett időt és energiát. Egyúttal arra biztatlak, hogy kedvenc tantárgyad anyagát tedd valahogyan fogyaszthatóbbá sorstársaid számára. Kevés valóban jól érthető könyv/jegyzet/oktatási segédanyag áll a rendelkezésünkre. Ez nem a mi hibánk, viszont szemeszter végén mindig mi vizsgázunk. Ilyen téren nem várható változás a közeljövőben. Mindenkinek máshoz van adottsága és érzéke, találd meg azt a módot, ahogyan segíteni tudsz!

A jegyzetet a LibreOffice Writer program segítségével készítettem. Ha pdf-ben továbbítjátok, akkor biztosan meg tudja nyitni az, akinek küldtitek, viszont -sajnos- nem tud beleszerkeszteni, így azt ajánlom az egész világnak, hogy még most térjen át a szabad szoftverek használatára! Jogdíj nincs, de sikeres demó/vizsga után meghívhatsz egy sörre (vagy kettőre). ☺

Kívánok szép „Ááá, már értem!” pillanatokat,

Borbély Márton (Marci)

Nagykovácsi, 2013. szeptember 26.

Ps.: Akár tartalmi, akár formai megjegyzésed van, köszönettel veszem, ha elküldöd a borbelymarci@gmail.com e-mail címre! Mindig van hova fejlődni, tudom jól.

01. példa *Mekkora lenne a normálállapotú levegő $\left(T = 0\,^oC\,;\;\; p = 101\,kPa\right)$ oxigén és nitrogén molekuláinak sebessége, ha valamennyien ugyanakkora mozgási energiával rendelkeznének?*

Adatok:

- hőmérséklet: $T = 0^o C = 273\,K$ *(szövegből)*
- nyomás: $101\,kPa = 1{,}01\cdot 10^5\,Pa$ *(szövegből)*
- moláris tömeg (O_2): $M_{O_2} = 32\,\frac{g}{mol} = 3{,}2\cdot 10^{-2}\,\frac{kg}{mol}$ *(táblázatból)*
- moláris tömeg (N_2): $M_{N_2} = 28\,\frac{g}{mol} = 2{,}8\cdot 10^{-2}\,\frac{kg}{mol}$ *(táblázatból)*

Releváns törvény:

$$\overline{\varepsilon_{mozgási}} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \overline{v^2} = \frac{3}{2}\cdot k\cdot T$$

(I. A „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.34)

- $\overline{\varepsilon_{mozgási}}$: egy részecskére eső átlagos mozgási energia
- m: egy részecske tömege
- $\overline{v^2}$: a részecskék sebességnégyzeteinek átlaga
- k: Boltzmann-állandó $\left(1{,}38\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}\right)$
- T: abszolút hőmérséklet

Számolás:

$$\overline{\varepsilon_{mozgási}} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \overline{v^2} = \frac{3}{2}\cdot k\cdot T$$

↓

$$\overline{v^2} = \frac{\frac{3}{2}\cdot k\cdot T}{\frac{1}{2}\cdot m} = \frac{3\cdot k\cdot T}{m}$$

Tételezzük fel, hogy minden részecske ugyanazzal a sebességgel mozog (azaz ugyanannyi a mozgási energiája). Így a sebességnégyzetek átlaga megegyezik az átlagsebesség négyzetével:

$$\overline{v^2} = \left(\overline{v}\right)^2 = \frac{3\cdot k\cdot T}{m}$$

↓ *ebből az átlagos sebesség*

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3\cdot k\cdot T}{m}}$$

↓ *A gyök alatti törtet az Avogadro-féle számmal (N_A) bővítjük.*

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3\cdot k\cdot N_A\cdot T}{m\cdot N_A}}$$

Az $R = k \cdot N_A$ és $M = m \cdot N_A$ egyenlőségeket felhasználva

- R: az egyetemes gázállandó
- N_A: az Avogadro-féle szám $\left(6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}\right)$
- M: moláris tömeg

a következőképpen alakítható át a képlet:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}}$$

Ebbe a képletbe kell behelyettesíteni egy oxigén-, illetve nitrogénmolekula móltömegét $\frac{kg}{mol}$ -ban és a hőmérsékletet kelvinben.

O_2: $\sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314 \cdot 273}{3{,}2 \cdot 10^{-2}}} = \sqrt{212786} = 461 \frac{m}{s}$

N_2: $\sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314 \cdot 273}{2{,}8 \cdot 10^{-2}}} = \sqrt{243185} = 493 \frac{m}{s}$

<u>Válasz:</u> Az oxigén molekuláinak $461 \frac{m}{s}$, a nitrogén molekuláinak $493 \frac{m}{s}$ sebessége lenne.

02. példa *Hány fokon duplázódik meg (testhőmérséklethez viszonyítva) a fehérjemolekula H-kötéseiben a termikus hibahelyek száma, ha a kötési energia 18,8 kJ/mol?*

Adatok:

- $T_{test} = 37^{o}C = 310\,K$ *(fejből)*
- $\dfrac{n_2}{n_1} = 2$ *(szövegből)*
- $\Delta E = 18{,}8\dfrac{kJ}{mol} = 1{,}88\cdot 10^{4}\dfrac{J}{mol}$ *(szövegből)*

A termikus hibahely felszakított hidrogénhidat jelent.

Releváns törvények:

[(I. A „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.25)]

$$n_i = n_0\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k\cdot T}} \quad \text{és} \quad R = N_A\cdot k$$

- n_i: a felszakított hidrogénhidak száma
- n_0: az ép hidrogénhidak száma
- e: Euler-féle szám $(\approx 2{,}7183)$
- $\Delta\varepsilon$: egy hidrogénhíd kötési energiája $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$
- k: Boltzmann-állandó $\left(1{,}38\cdot 10^{-23}\dfrac{J}{K}\right)$

Számolás:

Először kiszámoljuk a testhőmérséklethez tartozó termikus hibahelyek arányát, majd vesszük ennek kétszeresét, és kiszámoljuk az ehhez tartozó hőmérsékletet.

↓

$$n_i = n_0\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k\cdot T}} = n_0\cdot e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}}$$

- ΔE: egy mól hidrogénhíd kötési energiája
- R: az egyetemes gázállandó $\left(8{,}314\dfrac{J}{mol\cdot K}\right)$

↓

$$\frac{n_i}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}} = e^{-\frac{1{,}88\cdot 10^4}{8{,}314\cdot 310}} = 6{,}7937\cdot 10^{-4} \quad \to \text{ ennek kétszerese:} \quad 6{,}7937\cdot 10^{-4}\cdot 2 = 1{,}35874\cdot 10^{-3}$$

$$1{,}35874\cdot 10^{-3} = \frac{n_i}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}}$$

↓ */behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\ln\left(1{,}35874\cdot 10^{-3}\right) = -\frac{1{,}88\cdot 10^4}{8{,}314\cdot T}$$

↓

$$T = \frac{1{,}88\cdot 10^4}{8{,}314\cdot\ln\left(1{,}35874\cdot 10^{-3}\right)} = 342{,}6\,K = (342{,}6-273)^{0}C = 69{,}6\,^{0}C$$

Válasz: 69,6 ºC-on duplázódik meg a termikus hibahelyek száma.

03. példa *Hány termikus hibahely van közelítőleg egy 1400 H-kötést tartalmazó fehérje molekulában 37 °C-on, ha a kötési energia 18,8 kJ/mol?*

Adatok:

- H-kötések száma: $n_0 + n_1 = 1400$ *(szövegből)*
- hőmérséklet: $T = 37^oC = 310\,K$ *(szövegből)*
- egy mól H-híd kötési energiája: $\Delta E = 18{,}8\frac{kJ}{mol} = 1{,}88 \cdot 10^4\frac{J}{mol}$ *(szövegből)*

Releváns törvények:

$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k \cdot T}}$ és $R = N_A \cdot k$

(I. A „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.25)

- n_i: a felszakított hidrogénhidak száma
- n_0: az ép hidrogénhidak száma
- e: Euler-féle szám $(\approx 2{,}7183)$
- Δε: egy hidrogénhíd kötési energiája $\Delta \varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$
- k: Boltzmann-állandó $\left(1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K}\right)$

↓

$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k \cdot T}} = n_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{R \cdot T}}$

- ΔE: egy mól hidrogénhíd kötési energiája
- R: az egyetemes gázállandó $\left(8{,}314\frac{J}{mol \cdot K}\right)$

Számolás:

$\frac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R \cdot T}} = e^{-\frac{1{,}88 \cdot 10^4}{8{,}314 \cdot 310}} = 6{,}79 \cdot 10^{-4}$

Az arányszámból látható, hogy n_0 sokkal nagyobb, mint n_1, ezért n_1 az n_0 mellett elhanyagolható.

$1400 = n_0 + n_1 \approx n_0$

↓

$\frac{n_1}{1400} = 6{,}79 \cdot 10^{-4}$

↓

$n_1 = 0{,}95 \approx 1$

Válasz: 1 termikus hibahely van közelítőleg.

04. példa *A kötések hány százaléka van felszakított állapotban testhőmérsékleten, különböző kötési energiák (200 kJ/mol, illetve 0,5 kJ/mol) esetén?*

Adatok:

- $T_{test} = 37\,^oC = 310\,K$ *(fejből)*
- $E_{köt(1)} = 200\frac{kJ}{mol} = 2\cdot 10^5\frac{J}{mol}$ *(szövegből)*
- $E_{köt(1)} = 0{,}5\frac{kJ}{mol} = 5\cdot 10^2\frac{J}{mol}$ *(szövegből)*

Releváns törvények:

$n_i = n_0\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k\cdot T}}$ és $R = N_A\cdot k$ *(I. A „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.25)*

- n_i: a felszakított kötések száma
- n_0: az ép kötések száma
- e: Euler-féle szám $(\approx 2{,}7183)$
- Δε: egy kötés energiája $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1-\varepsilon_2$
- k: Boltzmann-állandó $\left(1{,}38\cdot 10^{-23}\frac{J}{K}\right)$

↓

$n_i = n_0\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k\cdot T}} = n_0\cdot e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}}$

- ΔE: egy mól kötés energiája
- R: az egyetemes gázállandó $\left(8{,}314\frac{J}{mol\cdot K}\right)$

Számolás:

A példa a felszakított kötések arányára (%) kérdez rá, tehát a következő hányadost kell kiszámolnunk:

$$\frac{n_1}{n_{összes}} = \frac{n_1}{n_1+n_0} \quad .$$

200 kJ/mol moláris kötési energia esetén: $\frac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}} = e^{-\frac{2\cdot 10^5}{8{,}314\cdot 310}} = 2\cdot 10^{-34}$

0,5 kJ/mol moláris kötési energia esetén: $\frac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R\cdot T}} = e^{-\frac{5\cdot 10^2}{8{,}314\cdot 310}} = 0{,}82366$

A kérdés viszont a következő arányra kérdez rá:

$$\frac{n_1}{n_{összes}} = \frac{n_1}{n_1+n_0}$$

Mivel a törtet tetszőlegesen bővíthetjük (hiszen csak arányra és nem konkrét számokra vagyunk kíváncsiak), válasszuk az $\frac{n_1}{n_0}$ hányados nevezőjét 1-nek.

Az első esetben $\left(n_1 = 2\cdot 10^{-34}\right)$ így: $\dfrac{n_1}{n_{összes}} = \dfrac{n_1}{n_1 + n_0} = \dfrac{2\cdot 10^{-34}}{2\cdot 10^{-34} + 1} \approx 2\cdot 10^{-34} \quad \rightarrow \quad 2\cdot 10^{-32}$ %

A második esetben $\left(n_1 = 0{,}82366\right)$: $\dfrac{n_1}{n_{összes}} = \dfrac{n_1}{n_1 + n_0} = \dfrac{0{,}82366}{0{,}82366 + 1} \approx 0{,}45 \quad \rightarrow \quad 45$ %

Válasz: 200 kJ/mol esetén a kötések $2\cdot 10^{-32}$ %-a, míg 0,5 kJ/mol esetén a kötések 45 %-a van felszakított állapotban testhőmérsékleten.

05. példa

Mekkora kötési energia esetén marad meg a kötések 99,9 %-a testhőmérsékleten?

Adatok:

- $T_{test} = 37\,^{o}C = 310\,K$ *(fejből)*
- $\dfrac{n_1}{n_0} = \dfrac{0{,}1\ \%}{99{,}9\ \%} \approx 0{,}001$ *(szövegből)*

Releváns törvények:

$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k \cdot T}}$ és $R = N_A \cdot k$

(I. A „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.25)

- n_i: a felszakított kötések száma
- n_0: az ép kötések száma
- e: Euler-féle szám $(\approx 2{,}7183)$
- $\Delta\varepsilon$: egy kötés energiája $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$
- k: Boltzmann-állandó $\left(1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\dfrac{J}{K}\right)$

↓

$n_i = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k \cdot T}} = n_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{R \cdot T}}$

- ΔE: egy mól kötés energiája
- R: az egyetemes gázállandó $\left(8{,}314\,\dfrac{J}{mol \cdot K}\right)$

Számolás:

$\dfrac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E}{R \cdot T}}$

↓

$\ln\left(\dfrac{n_1}{n_0}\right) = -\dfrac{\Delta E}{R \cdot T}$

↓

$-\ln\left(\dfrac{n_1}{n_0}\right) \cdot R \cdot T = \Delta E$

↓

$\Delta E = -\ln(0{,}001) \cdot 8{,}314\,\dfrac{J}{mol \cdot K} \cdot 310\ K = 17.804\,\dfrac{J}{mol} \approx 17{,}8\,\dfrac{kJ}{mol}$

$\Delta\varepsilon = \dfrac{\Delta E}{N_A} = \dfrac{17.804}{6 \cdot 10^{23}} = 2{,}97 \cdot 10^{-20}\,\dfrac{J}{kötés}$

Válasz: $17{,}8\,\dfrac{kJ}{mol}$ illetve $2{,}97 \cdot 10^{-20}\,\dfrac{J}{kötés}$ kötési energia esetén marad meg (a két érték teljesen ugyanazt jelenti, csak másra vonatkoztatja az energiát).

08. példa *A teljes elektromágneses spektrum optikai tartományában a látható sáv hullámhosszhatárai -kerekítve- 400-800 nm. Számítsuk ki a megfelelő fotonenergia-intervallum határait eV egységben.*

Adatok:

- hullámhossz: $\lambda = 400 - 800\,nm = 4\cdot 10^{-7}\,m - 8\cdot 10^{-7}\,m$ *(szövegből)*
- fénysebesség: $c = 3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}$ *(táblázatból)*
- átváltási arány: $1\,eV = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J$ *(táblázatból)*
- Planck-állandó: $h = 6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s$ *(táblázatból)*

Releváns törvények:

$c = \lambda\cdot f$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.26)*

- c: a fény sebessége
- λ: hullámhossz
- f: frekvencia

$\varepsilon = h\cdot f$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.86)*

- ε: egy kötés energiája
- h: Planck-állandó
- f: frekvencia

Számolás:

Az intervallumot két lépésben számoljuk ki, először a maximumot, majd a minimumot.

a,

$$c = \lambda\cdot f$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{4\cdot 10^{-7}\,m} = 7{,}5\cdot 10^{14}\,Hz \qquad \left(Hz = \frac{1}{s}\right)$$

$$\varepsilon = h\cdot f$$

↓

$$\varepsilon = \left(6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\,s\right)\cdot\left(7{,}5\cdot 10^{14}\,\frac{1}{s}\right) = 4{,}95\cdot 10^{-19}\,J$$

↓ */energia átváltása*

$$\varepsilon = \frac{4{,}95\cdot 10^{-19}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 3{,}1\,eV$$

b, Ugyanúgy a fenti gondolatmenetet alkalmazzuk, de a hullámhossznál 400 nm helyett 800 nm-rel számolunk.

↓

$\varepsilon = 1{,}55\, eV$

<u>Válasz:</u> A fotonenergia-intervallum határai: 3,1 – 1,55 eV.

09. példa *Milyen hullámhosszúságú fény okoz fotokémiai hatást, ha az ehhez szükséges energia 240 kJ/mol?*

Adatok:

- fénysebesség: $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ *(táblázatból)*
- Planck-állandó: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ *(táblázatból)*
- Avogadro-féle szám: $N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$ *(táblázatból)*
- 1 mólnyi kötés energiája: $E = 240 \frac{kJ}{mol} = 2{,}4 \cdot 10^5 \frac{J}{mol}$ *(szövegből)*

Releváns törvények:

$c = \lambda \cdot f$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.26)*

- c: fénysebesség
- λ: hullámhossz
- f: frekvencia

$$\varepsilon = \frac{E}{N_A}$$

- ε: egy kötés energiája
- E: egy mólnyi kötés energiája
- N_A: az Avogadro-féle szám

$\varepsilon = h \cdot f$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.86)*

- ε: egy kötés energiája
- h: Planck-állandó
- f: frekvencia

Számolás:

$$\varepsilon = \frac{E}{N_A} = \frac{2{,}4 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^{23}} = 4 \cdot 10^{-19} \frac{J}{kötés}$$

$$\varepsilon = h \cdot f$$

↓

$$f = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{4 \cdot 10^{-19}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}} = 6{,}0606 \cdot 10^{14}\, Hz \qquad \left(Hz = \frac{1}{s} \right)$$

$$c = \lambda \cdot f$$

↓

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

↓ *\/behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}}{6{,}0606 \cdot 10^{14}\ \frac{1}{s}} = 0{,}495 \cdot 10^{-6}\, m = 495 \cdot 10^{-9}\, m = 495\ nm$$

<u>Válasz:</u> A 495 nm-es fény okoz fotokémiai hatást.

13. példa

Egy CO_2 lézer 20 W teljesítményű infravörös fényét 0,1 mm átmérőjű körfelületre fókuszáljuk Mekkora lesz a sugárzás teljesítménysűrűsége (intenzitása)?

Adatok:

- teljesítmény: $P = 20\,W$ *(szövegből)*
- átmérő: $d = 0{,}1\,mm = 1\cdot 10^{-4}\,m$ *(szövegből)*

Elmélet:

- teljesítménysűrűség (intenzitás): az egységnyi felületre merőlegesen eső sugárzás teljesítménye
- A példa nem említi, hogy mekkora szög alatt esik be a lézerfény, így azt feltételezzük, hogy a teljes sugárzás merőlegesen érkezik.

Releváns törvények:

$$J = \frac{P}{A}$$ *(intenzitás definíciója)*

- J: intenzitás (teljesítménysűrűség)
- P: teljesítmény
- A: besugárzott felület

$$A_{kör} = r^2 \cdot \pi$$ *(matek)*

- $A_{kör}$: kör területe
- r: sugár
- π: pi

$$r = \frac{d}{2}$$ *(matek)*

- r: sugár
- d: átmérő

Számolás:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{1\cdot 10^{-4}\,m}{2} = 5\cdot 10^{-5}\,m$$

$$A_{kör} = r^2 \cdot \pi = \left(5\cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot \pi = 7{,}85\cdot 10^{-9}\,m^2$$

$$J = \frac{P}{A} = \frac{20\,W}{7{,}85\cdot 10^{-9}\,m^2} = 2{,}55\cdot 10^{9}\,\frac{W}{m^2}$$

Válasz: $2{,}55\cdot 10^{9}\,\frac{W}{m^2}$ lesz a sugárzás teljesítménysűrűsége (intenzitása).

14. példa

A CO_2 lézer fényének hullámhosszánál (10,6 μm) az izom gyengítési együtthatója 800 cm^{-1}, a Nd-YAG lézer hullámhosszánál (1,06 μm) 5,7 cm^{-1}. Milyen vastag izomrétegben nyelődik el a két lézer fényenergiájának 90 %-a?

Adatok:

- gyengítési együttható (CO_2): $\mu_{10,6\mu m} = 800\,cm^{-1}$ *(szövegből)*
- gyengítési együttható (Nd-YAG): $\mu_{1,06\mu m} = 5,7\,cm^{-1}$ *(szövegből)*
- $\frac{J}{J_0} = 0,1$ (90 %-át elnyeli → 10 %-át átengedi)

Releváns törvény:

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.11)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- μ: lineáris gyengítési együttható

Számolás:

adatok → $\frac{J}{J_0} = 0,1$

törvény → $\frac{J}{J_0} = e^{-\mu \cdot x}$

↓ */hiszen az adatok között a törvénynek megfelelő összefüggést feltételezünk*

$0,1 = e^{-\mu \cdot x}$

↓

$\ln(0,1) = \ln\left(e^{-\mu \cdot x}\right) = -\mu \cdot x$

↓ */ :-μ*

$x = \frac{\ln(0,1)}{-\mu}$

↓ */behelyettesítjük a meglévő adatokat*

CO_2 lézer: $x = \frac{\ln(0,1)}{-\mu} = \frac{\ln(0,1)}{-800\,cm^{-1}} = 2,88 \cdot 10^{-3}\,cm = 2,88 \cdot 10^{-5}\,m$

Nd-YAG lézer: $x = \frac{\ln(0,1)}{-\mu} = \frac{\ln(0,1)}{-5,7\,cm^{-1}} = 4,04 \cdot 10^{-1}\,cm = 4,04 \cdot 10^{-3}\,m$

Válasz: CO_2 lézer esetében $2,88 \cdot 10^{-5}\,m$ $(\approx 0,03\,mm)$, Nd-YAG lézer esetében $4,04 \cdot 10^{-3}\,m$ $(\approx 4\,mm)$ mélyen nyelődik el a fényenergia 90 %-a.

15. példa

A szem optikai közegei az argonion-lézer 488 nm-es hullámhosszán a vízéhez hasonlóan kb. 10^{-4} cm^{-1}-es gyengítési együtthatóval jellemezhetők, a véré pedig ugyanezen hullámhossznál 330 cm^{-1}.

a) Hány %-os energiaveszteséggel éri el a 488 nm-es lézerfény a szemfeneket, ha az úthossz a szemben 2,5 cm?

b) E lézersugárral a szemfenéken egy kapillárist céloztunk meg fotokoaguláció céljából. Milyen vastag vérréteg csökkenti e fény intenzitását a felére?

<u>Adatok:</u>

- gyengítési együttható (a szem optikai közegei): $\mu_{szem} = 10^{-4}\ cm^{-1}$ *(szövegből)*
- gyengítési együttható (vér): $\mu_{vér} = 330\ cm^{-1}$ *(szövegből)*
- úthossz a szemben: $x_{szem} = 2{,}5\,cm$ *(szövegből)*
- úthossz a vérben: $x_{vér} = D_{vér}$ *(szövegből)*

a) Az energiaveszteség arányos az intenzitásveszteséggel.

<u>Releváns törvény:</u>

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.11)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- μ: lineáris gyengítési együttható

<u>Számolás:</u>

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\mu \cdot x} = e^{-10^{-4} \cdot 2{,}5} = 0{,}99975$$

arány → százalék $0{,}99975 \cdot 100 = 99{,}975\ \%$ -a marad meg az intenzitásnak (energiának)

↓

A veszteség: $100 - 99{,}975 = 0{,}025\ \%$ volt.

b) Tulajdonképpen felezési rétegvastagságot (D) kérdeznek, hiszen az intenzitás a felére csökken.

<u>Releváns törvény:</u>

$\mu = \frac{ln2}{D}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.13)*

- μ: lineáris gyengítési együttható
- D: felezési rétegvastagság

Számolás:

$$\mu = \frac{ln2}{D}$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$D = \frac{ln2}{\mu} = \frac{ln2}{330} = 0{,}0021\,cm = 2{,}1 \cdot 10^{-5}\,m = 0{,}021\,mm$$

Válasz:

a) 0,025 %-os energiaveszteséggel éri el a lézerfény a szemfeneket.

b) 0,02 mm vastag réteg csökkenti az intenzitást a felére.

16. példa

Egy konvex lencse elé, attól 12 cm-re egy tárgyat helyezünk el. A kép a lencse mögött 36 cm-re keletkezik. Mekkora a lencse fókusztávolsága, a dioptriában kifejezett törőereje, és mekkora a nagyítás?

Adatok:

- tárgytávolság: $t = 12\,cm$ *(szövegből)*
- képtávolság: $k = 36\,cm$ *(szövegből)*

Releváns törvények és számolás:

a, fókusztávolság

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36}$$

(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)

- f: fókusztávolság
- t: tárgytávolság
- k: képtávolság

↓

$f = 9\,cm = 0{,}09\,m$

b, törőerő

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}09} = 11{,}1\,dpt$$

/felhasználtuk az előző pontban kiszámolt fókusztávolságot

- D: törőerő
- f: fókusztávolság

c, nagyítás

$$N = \frac{k}{t} = \frac{36}{12} = 3$$

(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)

- N: nagyítás
- k: képtávolság
- t: tárgytávolság

Válasz: A lencse fókusztávolsága 9 cm; dioptriában kifejezett törőereje 11,1 dpt és nagyítása 3.

17. példa

Mekkora a mikroszkóppal feloldható legkisebb távolság, ha az objektív nyílásszöge 140°, cédrusolaj immerziót (n = 1,5) használunk és a megvilágító fény sárgászöld (λ = 520 nm)?

Adatok:

- objektív nyílásszöge: $2\omega = 140^o$ *(szövegből)*
- cédrusolaj törésmutatója: $n = 1{,}5$ *(szövegből)*
- megvilágító fény hullámhossza: $\lambda = 520\,nm = 5{,}2\cdot 10^{-7}\,m$ *(szövegből)*

Releváns törvények:

$$\delta = 0{,}61\frac{\lambda}{n\cdot\sin\omega}$$ *(Speciális mikroszkópok; VI.28 - 3)*

- δ: felbontási határ
- λ: megvilágító fény hullámhossza
- n: tárgy és az objektív közötti közeg törésmutatója
- ω: objektív félnyílásszöge

$$\omega = \frac{2\omega}{2}$$ *(logika)*

- ω: félnyílásszög
- 2ω: nyílásszög

Számolás:

$$\omega = \frac{2\omega}{2} = \frac{140^o}{2} = 70^o$$

$$\delta = 0{,}61\frac{\lambda}{n\cdot\sin\omega} = 0{,}61\frac{520\cdot 10^{-9}}{1{,}5\cdot\sin 70^o} = 2{,}25\cdot 10^{-7}\,m$$

Válasz: A mikroszkóppal feloldható legkisebb távolság $2{,}25\cdot 10^{-7}$ m.

18. példa

Számítsuk ki, hogy ha a refraktométer prizmái (törésmutató: 1,739) közé desztillált vizet (törésmutató: 1,333) cseppentünk,

a) mekkora lesz a határszög?

b) Hogyan változik meg a határszög értéke (a határvonal helyzete), ha desztillált víz helyett egészséges ember vérplazmáját (törésmutató: 1,3486) használjuk?

c) Hány százalékkal csökken a fény terjedési sebessége a prizmában a desztillált vízhez képest? Számítsuk ki a csökkenést levegő/prizma összeállításra is! (A levegő törésmutatóját vegyük 1-nek!)

Adatok:

- prizma törésmutatója: $n_{prizma} = 1{,}739$ *(szövegből)*
- desztillált víz törésmutatója: $n_{desztillált\ víz} = 1{,}333$ *(szövegből)*
- vérplazma törésmutatója: $n_{vérplazma} = 1{,}3486$ *(szövegből)*

a) Releváns törvény:

$$\frac{1}{\sin\beta_h} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$ *(Refraktométer; 5)*

↓

$$\sin\beta_h = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1{,}333}{1{,}739} = 0{,}76653 \quad \rightarrow \quad \beta_h = 50{,}0^o$$

b) Releváns törvény:

$$\sin\beta_h = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1{,}3486}{1{,}739} = 0{,}77550 \quad \rightarrow \quad \beta_h = 50{,}85^o$$ *(Refraktométer; 5)*

c) Releváns törvény:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.14)*

↓

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}739}{1{,}333} = 1{,}305 \quad \rightarrow \quad 100 - \frac{1{,}333}{1{,}739}\cdot 100 = 23{,}35\ \%$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}739}{1} = 1{,}739 \quad \rightarrow \quad 100 - \frac{1}{1{,}739}\cdot 100 = 42{,}50\ \%$$

Válasz:

a) A határszög 50,0°.

b) A határszög 50,85° lesz.

c) A prizmában a fény terjedési sebessége 23,35 %-kal csökken a desztillált vízhez képest.
A prizmában a fény terjedési sebessége 42,50 %-kal csökken a levegőhöz képest.

19. példa

Mennyi energiát veszít sugárzás révén 1 óra alatt az az ember, akinek testfelülete 0,8 m², ha a környezet hőmérséklete 20 °C? A bőrfelület hőmérséklete 27 °C.

Adatok:

- idő: $t = 1\,h = 3600\,s$ *(szövegből)*
- bőrfelület hőmérséklete: $T_{bőrfelület} = 27\,^oC = 300\,K$ *(szövegből)*
- környezet hőmérséklete: $T_{környezet} = 20\,^oC = 293\,K$ *(szövegből)*
- testfelület: $A = 0{,}8\,m^2$ *(szövegből)*

Releváns törvény:

$$\Delta M = \sigma\cdot\left(T_{test}^4 - T_{környezet}^4\right)$$

(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.41)

- ΔM: kisugárzott felületi teljesítménye
- σ: Stefan-Boltzmann-állandó $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}\dfrac{J}{m^2\cdot K^4\cdot s}$
- T_{test}: test hőmérséklete
- $T_{környezet}$: környezet hőmérséklete

Számolás:

↓

$$\Delta M = 5{,}7\cdot 10^{-8}\cdot\left(300^4 - 293^4\right) = 41{,}61\,\frac{J}{m^2\cdot s}$$

ΔM egy intenzitás jellegű mennyiség (csak itt nem követeljük meg, hogy a sugárzás merőleges legyen a vizsgált felületre), vagyis egységnyi időre és felületre vonatkoztatott energiaváltozás.

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{t\cdot A}$$

↓

$$\Delta E = \Delta M\cdot t\cdot A = 41{,}61\,\frac{J}{m^2\cdot s}\cdot 0{,}8\,m^2\cdot 3600\,s = 1{,}2\cdot 10^5\,J = 120\,kJ$$

Válasz: 120 kJ energiát veszít sugárzás révén.

20. példa *Mekkora hőmérsékletű környezet sugározza vissza felét annak az energiának, amit 28 °C hőmérséklet mellett kisugárzunk?*

Adatok:

- test hőmérséklete: $T_{test} = 28^{o}C = 301\,K$ *(szövegből)*

Releváns törvény:

$M_{fekete}(T) = \sigma \cdot T^4$ [(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.41)]

- M_{fekete}: abszolút fekete test kisugárzott felületi teljesítménye
- σ: Stefan-Boltzmann-állandó $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \dfrac{J}{m^2 \cdot K^4 \cdot s}$
- T: fekete test abszolút hőmérséklete

Számolás:

„Abszolút” fekete test a valóságban nincsen, de jó közelítéssel érvényes marad a törvény. Ennek értelmében a test és a környezet kisugárzott felületi teljesítménye a következőképpen írható fel:

$$M_{test} = \sigma \cdot T^4_{test}$$

$$M_{környezet} = \sigma \cdot T^4_{környezet}$$

A szöveg alapján a következő összefüggést tudjuk ezen értékek között megállapítani:

$$\frac{1}{2} \cdot M_{test} = M_{környezet}$$

Szavakkal: A test által kisugárzott felületi teljesítmény fele megegyezik a környezet kisugárzott teljesítményével, tehát a környezet a kisugárzott energia felét sugározza vissza.

↓ */felhasználva a fenti 2 egyenlőséget*

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\sigma \cdot T^4_{test}\right) = \sigma \cdot T^4_{környezet}$$

↓ */osztunk σ-val és negyedik gyököt vonunk*

$$T_{környezet} = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot T^4_{test}}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2} \cdot 301^4} = 253\,K = -20^{o}C$$

Válasz: -20 °C hőmérsékletű környezet sugározza vissza a felét a kisugárzott energiának.

23. példa *Milyen vastag alumíniumlemez nyeli el a röntgensugárzás 90 %-át, ha az alumínium tömeggyengítési együtthatója 0,171 cm²/g erre a sugárzásra nézve?*

Adatok:

- alumínium tömeggyengítési együtthatója: $\mu_{m(Al)} = 0{,}171\,\frac{cm^2}{g}$ *(szövegből)*
- alumínium sűrűsége: $\rho_{Al} = 2{,}7\,\frac{g}{cm^3}$ *(táblázatból)*
- *10 %-os transzmittivitás:* $\frac{kilépő\ (gyengített)\ intenzitás}{belépő\ (gyengítetlen)\ intenzitás} = \frac{J}{J_0} = 0{,}1$

Releváns törvények:

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő" anyaggal; II.11)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- μ: lineáris gyengítési együttható

$\mu = \mu_m \cdot \rho$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő" anyaggal; II.85)*

- μ: lineáris gyengítési együttható
- μ_m: tömeggyengítési együttható
- ρ: sűrűség

Számolás:

$$\mu = \mu_m \cdot \rho = 0{,}171\,\frac{cm^2}{g} \cdot 2{,}7\,\frac{g}{cm^3} = 0{,}4617\,cm^{-1}$$

adatok → $\frac{J}{J_0} = 0{,}1$ */a lemez a sugárzás 90 %-át elnyeli, ergo a 10 %-át átengedi*

törvény → $\frac{J}{J_0} = e^{-\mu \cdot x}$

↓ */az adatokból és a törvényből együtt következik, hogy:*

$$\frac{J}{J_0} = 0{,}1 = e^{-\mu \cdot x}$$

↓ */logaritmizálás (természetes alappal)*

$$\ln(0{,}1) = -\mu \cdot x$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a μ-t*

$$x = \frac{\ln(0{,}1)}{-\mu} = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}4617} = 4{,}987 \simeq 5{,}0\,cm$$

Válasz: 5,0 cm vastag alumíniumlemez nyeli el a röntgensugárzás 90 %-át.

24. példa

Valamely gamma-sugárzás felezési rétegvastagsága ólomban 3 mm.

a) Milyen vastag ólomlemezzel lehetne a sugárzás intenzitását tizedrészére csökkenteni?

b) Mekkora az ólom gyengítési együtthatója az adott sugárzásra vonatkozólag?

Adatok:

- felezési rétegvastagság: $D = 3\,mm = 0{,}3\,cm$ *(szövegből)*

a) Releváns törvény:

$J = J_0 \cdot 2^{-\frac{x}{D}}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.12)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- D: felezési rétegvastagság

adatok → $\frac{J}{J_0} = 0{,}1$ és törvény→ $\frac{J}{J_0} = 2^{-\frac{x}{D}}$

↓

$$\frac{J}{J_0} = 0{,}1 = 2^{-\frac{x}{D}} = 2^{-\frac{x}{0{,}3}}$$

↓ */logaritmizálás (lg) emlékeztető matekból:* $\log_a(x)^k = k \cdot \log_a(x)$

$$\log_{10} 0{,}1 = \frac{-x}{D} \cdot \log_{10} 2$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük D értékét*

$$x = -1 \cdot \frac{D \cdot \log_{10} 0{,}1}{\log_{10} 2} = -1 \cdot \frac{0{,}3 \cdot \log_{10} 0{,}1}{\log_{10} 2} = 0{,}997 \simeq 1\,cm$$

b) Releváns törvény:

$\mu = \frac{ln2}{D} = \frac{ln2}{0{,}3} \simeq 2{,}31\,cm^{-1}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.13)*

- μ: lineáris gyengítési együttható
- D: felezési rétegvastagság

Válasz:

a) 1 cm vastag ólomlemezzel lehetne a sugárzás intenzitását tizedrészére csökkenteni.

b) 2,31 cm^{-1} az ólom gyengítési együtthatója az adott sugárzásra vonatkozólag.

25. példa

A felezési réteg hányszorosa gyengíti a sugárzás intenzitását 95 %-kal?

Adatok:

- $95\ \% - os\ abszorbancia \rightarrow 5\ \% - os\ transzmittivitás$

↓

$$\frac{kilépő\ (gyengített)\ intenzitás}{belépő\ (gyengítetlen)\ intenzitás} = \frac{J}{J_0} = 0{,}05 \qquad (szövegből)$$

Releváns törvény:

$J = J_0 \cdot 2^{-\frac{x}{D}}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.12)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- D: felezési rétegvastagság

Számolás:

adatok→ $\frac{J}{J_0} = 0{,}05$

törvény→ $\frac{J}{J_0} = 2^{-\frac{x}{D}}$

↓

$$\frac{J}{J_0} = 0{,}05 = 2^{-\frac{x}{D}}$$

↓ /logaritmizálás (lg) emlékeztető matekból: $\log_a(x)^k = k \cdot \log_a(x)$

$$\log_{10} 0{,}05 = \frac{-x}{D} \cdot \log_{10} 2$$

↓ /átrendezzük az egyenletet

$$x = -1 \cdot \frac{\log_{10} 0{,}05 \cdot D}{\log_{10} 2} \simeq 4{,}32\, D$$

Válasz: A felezési réteg 4,32-szerese gyengíti a sugárzás intenzitását 95 % -kal.

26. példa

Hány százalékra gyengíti a sugárzás intenzitását a 3,33-szoros felező réteg?

Adatok:

- rétegvastagság: $x = 3{,}33\,D$ *(szövegből)*

Kérdés:

$$\frac{J}{J_0}\cdot 100\,\% = ?$$

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás

↑

Ez nem más, mint a transzmittivitás formulája. Ennek konkrét értékére vonatkozik a kérdés.

Releváns törvény:

$$J = J_0\cdot 2^{-\frac{x}{D}}$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.12)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- D: felezési rétegvastagság

Számolás:

$$J = J_0\cdot 2^{-\frac{x}{D}}$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a D függvényében kifejezett x-et*

$$\frac{J}{J_0} = 2^{-\frac{x}{D}} = 2^{-\frac{3{,}33\,D}{D}} = 2^{-3{,}33} = 0{,}1$$

↓ */átváltjuk százalékba az arányt*

$$\frac{J}{J_0}\cdot 100\,\% = 0{,}1\cdot 100\,\% = 10\,\%$$

Válasz: 10 %-ra gyengíti a sugárzás intenzitását

$\left(10\ \%-os\ transzmittivitás\ =\ 90\ \%-os\ abszorbancia\right)$

27. példa

Valamely bétasugárzás intenzitását egy alumínium-lemez 29,2 %-kal csökkenti. Hányszoros rétegben alkalmazott lemez esetén nyerjük a felezési réteget?

Adatok:

- $29{,}2\ \% - os\, abszorbancia$ ➜ $70{,}8\ \% - os\; transzmittivitás$ *(szövegből)*

Releváns törvény:

$J = J_0 \cdot 2^{-\frac{x}{D}}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.12)*

- J: kilépő (gyengített) intenzitás
- J_0: belépő (gyengítetlen) intenzitás
- x: rétegvastagság
- D: felezési rétegvastagság

Számolás:

adatok→ $\frac{J}{J_0} = 0{,}708$ és törvény→ $\frac{J}{J_0} = 2^{-\frac{x}{D}}$

↓

$$\frac{J}{J_0} = 0{,}708 = 2^{-\frac{x}{D}}$$

↓ */logaritmizálás (lg) emlékeztető matekból:* $\log_a (x)^k = k \cdot \log_a (x)$

$$\log_{10} 0{,}708 = -\frac{x}{D} \cdot \log_{10} 2$$

↓

$$D = \frac{\log_{10} 2\ \cdot\ -x}{\log_{10} 0{,}708} = 2{,}007\, x \simeq 2\text{x}$$

Válasz: Kétszeres rétegben alkalmazott lemez esetén nyerjük a felezési réteget.

32. példa

2 MBq ^{32}P preparátum aktivitása mennyi idő alatt csökken 0,1 kBq-re?

Adatok:

- felezési idő: $T = 14{,}28\,nap$ *(táblázatból)*
- eredeti aktivitás: $\Lambda_0 = 2\,MBq = 2 \cdot 10^6\,Bq$ *(szövegből)*
- csökkent aktivitás: $\Lambda = 0{,}1\,kBq = 1 \cdot 10^2\,Bq$ *(szövegből)*

Releváns törvények:

$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.101)*

- Λ: csökkent aktivitás
- Λ_0: eredeti aktivitás
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- λ: bomlási állandó
- t: idő

$\lambda \cdot T = ln2$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.98)*

- λ: bomlási állandó
- T: felezési idő

Számolás:

$$\lambda \cdot T = ln2$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük T-t*

$$\lambda = \frac{ln2}{T} = \frac{ln2}{14{,}28\,nap} = 0{,}04854\,nap^{-1}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

↓

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = e^{-\lambda \cdot t}$$

↓

$$\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right) = -\lambda \cdot t$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$t = \frac{\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)}{-\lambda} = \frac{\ln\left(\frac{1 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6}\right)}{-0{,}04854} = 204\,nap$$

Válasz: 204 nap alatt csökken 0,1 kBq-re.

45. példa *Mekkora a 0,6 GBq ^{24}Na izotóp környezetében 30 cm levegő távolságban várható dózisteljesítmény?*

Adatok:

- ^{24}Na K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 444\ \frac{\mu Gy_{lev} \cdot m^2}{GBq \cdot h}$ *(táblázatból)*
- távolság: $r = 30\,cm = 0{,}3\,m$ *(szövegből)*

Releváns törvény:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- $D_{levegő}$: dózisteljesítmény
- K_γ: dóziskonstans
- Λ: aktivitás
- t:
- r: távolság

Számolás:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2} = 444 \cdot \frac{0{,}6 \cdot 1}{0{,}3^2} = 2960\,\mu Gy = 2{,}96\,mGy$$

Válasz: 2,96 mGy_{lev}/h a várható dózisteljesítmény.

47. példa

20 MBq aktivitású ^{24}Na izotóppal dolgozunk. 40 cm távolságra van tőlünk a preparátum. Milyen vastag ólomabszorbenst kell alkalmaznunk, hogy a dózisteljesítmény ne legyen több, mint 20 µGy_{lev}/h?

Adatok:

- ^{24}Na K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 444 \frac{\mu Gy_{lev} \cdot m^2}{GBq \cdot h}$ *(táblázatból)*
- tömeggyengítési együttható: $\mu_m(^{24}Na\,,\ ólom\,abszorbens) = 5 \cdot 10^{-2} \frac{cm^2}{g}$ *(táblázatból)*
- ólom sűrűsége: $\rho_{Pb} = 11{,}3 \frac{g}{cm^3}$ *(táblázatból)*
- aktivitás: $\Lambda = 20\,MBq = 0{,}02\,GBq$ *(szövegből)*

Releváns törvények:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$ (Dozimetria; 8)

- $D_{levegő}$: dózisteljesítmény
- K_γ: dóziskonstans
- Λ: aktivitás
- t:
- r: távolság

$$D = D_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

$$\mu = \mu_m \cdot \rho$$ (Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.85)

- μ: lineáris gyengítési együttható
- μ_m: tömeggyengítési együttható
- ρ: sűrűség

Számolás:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2} = 444 \cdot \frac{0{,}02 \cdot 1}{0{,}4^2} = 55{,}5\,\mu Gy$$

$$\mu = \mu_m \cdot \rho = 5 \cdot 10^{-2} \frac{cm^2}{g} \cdot 11{,}3 \frac{g}{cm^3} = 0{,}565\,cm^{-1}$$

$$D = D_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$x = \frac{\ln\left(\frac{D}{D_0}\right)}{-\mu} = \frac{\ln\left(\frac{20}{55{,}5}\right)}{-0{,}565} = 1{,}806 \simeq 1{,}8\,cm$$

Válasz: 1,8 cm vastag ólomabszorbenst kell alkalmaznunk.

48. példa

Mekkora távolságot kell tartanunk 0,56 GBq ^{131}I izotóp környezetében, hogy 20 $\mu Gy_{lev}/h$ dózisteljesítményt ne lépjünk túl?

Adatok:

- aktivitás: $\Lambda = 0{,}56\, GBq$ *(szövegből)*
- dózisteljesítmény: $D = 20\,\mu Gy_{lev}/h$ *(szövegből)*
- ^{131}I K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 54\ \frac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}$ *(táblázatból)*

Releváns törvény:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda\cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- D: dózisteljesítmény
- K_γ: dózisállandó
- Λ: aktivitás
- t:
- r: távolság (forrás-detektor)

Számolás:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda\cdot t}{r^2}$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$r = \sqrt{\frac{K_\gamma\cdot\Lambda\cdot t}{D}} = \sqrt{\frac{54\cdot 0{,}56\cdot 1}{20}} \simeq 1{,}230\, m = 123\, cm$$

Válasz: 123 cm távolságot kell tartanunk.

49. példa *0,5 GBq ^{24}Na izotópot 2 cm vastag ólomfal mögé tettünk. Mekkora a dózisteljesítmény az ólomfal másik oldalán, az izotóptól mért 30 cm távolságban?*

Adatok:

- aktivitás: $\Lambda = 0{,}5\,GBq$
- ^{24}Na K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 444\ \frac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}$ *(táblázatból)*
- tömeggyengítési együttható: $\mu_m\left({}^{24}Na\,,\ \acute{o}lom\,abszorbens\right) = 5\cdot 10^{-2}\,\frac{cm^2}{g}$ *(táblázatból)*
- forrás-detektor távolság: $r = 30\,cm = 0{,}3\,m$ *(szövegből)*
- ólom sűrűsége: $\rho_{Pb} = 11{,}3\,\frac{g}{cm^3}$ *(táblázatból)*

Releváns törvények:

$$D_{levegő} = K_\gamma\cdot\frac{\Lambda\cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- D: dózisteljesítmény
- K_γ: dózisállandó
- Λ: aktivitás
- t:
- r: távolság (forrás-detektor)

$$\mu = \mu_m\cdot\rho$$ *(Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.85)*

- μ: lineáris gyengítési együttható
- μ_m: tömeggyengítési együttható
- ρ: sűrűség

$$D = D_0\cdot e^{-\mu\cdot x}$$

Számolás:

$$D_{levegő} = K_\gamma\frac{\Lambda\cdot t}{r^2} = 444\frac{0{,}5\cdot 1}{0{,}3^2} = 2466{,}7\,\mu Gy$$

$$\mu = \mu_m\cdot\rho = 5\cdot 10^{-2}\frac{cm^2}{g}\cdot 11{,}3\frac{g}{cm^3} = 0{,}565\,cm^{-1}$$

$$D = D_0\cdot e^{-\mu\cdot x}$$

↓ */átrendezzük az egyenletet és behelyettesítjük a meglévő adatokat*

$$D = D_0\cdot e^{-\mu\cdot x} = 2466{,}7\cdot e^{-0{,}565\cdot 2} = 796{,}8\,\mu Gy = 0{,}8\,mGy_{lev}/h$$

Válasz: 0,8 mGy_{lev}/h a dózisteljesítmény az ólomfal másik oldalán.

50. példa *Mennyi ideig tartózkodhatunk 0,75 GBq ^{59}Fe preparátumtól 30 cm távolságban, hogy ne lépjük túl a maximálisan megengedett heti dózist, azaz 1 mSv-et?*

Adatok:

- aktivitás: $\Lambda = 0{,}75\,GBq$ *(szövegből)*
- ^{59}Fe K_γ dóziskonstansának értéke: $K_\gamma = 160\ \dfrac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}$ *(táblázatból)*
- dózis: $1\,mSv = 1\,mGy = 1000\,\mu Gy$ *(szövegből)*
- forrás-detektor távolság: $r = 30\,cm = 0{,}3\,m$ *(szövegből)*

Releváns törvény:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$ *(Dozimetria; 8)*

- D: dózisteljesítmény
- K_γ: dózisállandó
- Λ: aktivitás
- t:
- r: távolság (forrás-detektor)

Számolás:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$

↓

$$t = \frac{D\cdot r^2}{K_\gamma \cdot \Lambda} = \frac{1000\cdot 0{,}3^2}{160\cdot 0{,}75} = 0{,}75\,h = 45\,min$$

Válasz: 45 percig tartózkodhatunk a preparátumtól 30 cm távolságban.

51. példa

75 MBq ^{24}Na izotóptól 30 cm távolságban dolgozunk. Milyen vastag ólomfalat kell alkalmaznunk, hogy helyünkön 15 μGy_{lev}/h értékre csökkenjen a dózisteljesítmény?

Adatok:

- csökkent dózisteljesítmény: $D = 15\,\mu Gy_{lev}/h$ *(szövegből)*
- aktivitás: $\Lambda = 75\,MBq = 0{,}075\,GBq$ *(szövegből)*
- forrás-detektor távolság: $r = 30\,cm = 0{,}3\,m$ *(szövegből)*
- *^{24}Na K_γ dóziskonstansának értéke:* $K_\gamma = 444\,\dfrac{\mu\,Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot h}$ *(táblázatból)*
- ólom sűrűsége: $\rho_{Pb} = 11{,}3\,\dfrac{g}{cm^3}$ *(táblázatból)*
- tömeggyengítési együttható: μ_m (^{24}Na, ólom abszorbens): $5\cdot 10^{-2}\,\dfrac{cm^2}{g}$ *(táblázatból)*

Releváns törvények:

$$D_{levegő} = K_\gamma \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2}$$ (Dozimetria; 8)

- D: dózisteljesítmény
- K_γ: dózisállandó
- Λ: aktivitás
- t:
- r: távolság (forrás-detektor)

$$\mu = \mu_m \cdot \rho$$ (II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.85)

- μ: lineáris gyengítési együttható
- μ_m: tömeggyengítési együttható
- ρ: sűrűség

$$D = D_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

- D: csökkent dózisteljesítményt
- D_0: kezdeti dózisteljesítmény
- e: Euler-féle szám (~2,7183)
- μ: lineáris gyengítési együttható
- x: rétegvastagság

<u>Számolás:</u>

$$D_{levegő} = K_{\gamma} \cdot \frac{\Lambda \cdot t}{r^2} = 444 \cdot \frac{0{,}075 \cdot 1}{0{,}3^2} = 370\,\mu\,Gy$$

$$\mu = \mu_m \cdot \rho = 5 \cdot 10^{-2} \frac{cm^2}{g} \cdot 11{,}3 \frac{g}{cm^3} = 0{,}565\,cm^{-1}$$

$$D = D_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

↓

$$x = \frac{\ln\left(\frac{D}{D_0}\right)}{-\mu} = \frac{\ln\left(\frac{15}{370}\right)}{-0{,}565} = 5{,}67\,cm$$

<u>Válasz:</u> 5,67 cm vastag ólomfalat kell alkalmaznunk.

55. példa *Egy elektronmikroszkóp 5 keV-os elektronokkal dolgozik. Mekkora a feloldóképessége, ha a elektronobjektív nyílásszöge 6°?*

Adatok:

- gyorsítófeszültség: $U = 5\,keV = 5 \cdot 10^3\,V$
- elektron töltése: $q_q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Cb$
- elektron tömege: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$
- Planck-állandó: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$
- $\mathit{nyílásszög} : 2\omega = 6^o$ ➔ $\mathit{félnyílásszög} : \omega = 3^o$
- törésmutató: $n = 1$ (Az elektronmikroszkópban vákuum van, az elektron anyaghullámának törésmutatója 1)

Releváns törvények:

$$\varepsilon_{el} = q \cdot U$$

- ε_{el}: elektromos munka
- q: a gyorsított részecske töltése
- U: gyorsítófeszültség

$$\varepsilon_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

- ε_{kin}: mozgási (kinetikus) energia
- m: tömeg
- v: sebesség

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

(Az „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban; I.3)

- λ: a de Broglie-féle anyaghullám hullámhossza
- p: impulzus
- m: tömeg
- v: sebesség

$$\delta = 0{,}61 \cdot \frac{\lambda}{n \cdot \sin \omega}$$ (Speciális mikroszkópok; VI.28 - 3)

- δ: felbontási határ
- λ: hullámhossz
- n:
- ω: félnyílásszög

$$f = \frac{1}{\delta}$$

- f: feloldóképesség (felbontóképesség)
- δ: felbontási határ

Számolás:

Az 5 keV-os elektron azt jelenti, hogy az elektronokat 5 keV gyorsítja. Az elektromos térben való gyorsítás során az elektromos munka (ε_{el}) mozgási (kinetikus, ε_{kin}) energiává alakul:

$\varepsilon_{el} \rightarrow \varepsilon_{kin}$

$$q \cdot U = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

↓ /·2·m

$$2 \cdot m \cdot q \cdot U = m^2 \cdot v^2$$

↓ /√

$$\sqrt{2 \cdot m \cdot q \cdot U} = m \cdot v = p$$

A fenti összefüggések használatával a részecske lendületét (a kinetikus, illetve elektromos energia és a tömeg ismeretében) a sebesség kiszámolása nélkül is kifejezhetjük. Ezt helyettesítjük be az anyaghullámot megadó képletbe:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot q \cdot U}} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^3}} = 1{,}73 \cdot 10^{-11} m = 17{,}3\, pm$$

↓

$$\delta = 0{,}61 \frac{\lambda}{n \cdot \sin \omega} = 0{,}61 \frac{1{,}73 \cdot 10^{-11}}{1 \cdot \sin 3^o} = 2{,}0164 \cdot 10^{-10} m \approx 0{,}2\, nm$$

↓

$$f = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{0{,}2\, nm} = 5\, nm^{-1}$$

Válasz: Az elektronmikroszkóp feloldóképessége 5 nm^{-1}.

56. példa

A szív percenként 5,6 l vért pumpál az 1 cm sugarú aortába. Mekkora a vér átlagos áramlási sebessége az aortában?

Adatok:

- térfogat: $\Delta V = 5{,}6\,l = 5{,}6 \cdot 10^{-3}\, m^3$
- idő: $\Delta t = 1\ min = 60\, s$
- sugár: $r = 1\, cm = 0{,}01\, m$

Releváns törvények:

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$ *(III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.1)*

- I_V: térfogati áramerősség
- Δ V: térfogat
- Δ t: idő

$$I_V = A \cdot \bar{v} = \text{állandó}$$ *(III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.4)*

- I_V: térfogati áramerősség
- A: cső (ér) keresztmetszete
- $\bar{v}$: átlagsebesség

$$A = r^2 \cdot \pi$$ *(matek)*

- A: kör területe
- r: kör sugara
- π: pi (~3,14)

Számolás:

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{5{,}6 \cdot 10^{-3}}{60} = 9{,}33 \cdot 10^{-5}\, \frac{m^3}{s}$$

$$A = r^2 \cdot \pi = 0{,}01^2 \cdot \pi = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\ m^2$$

$$I_V = A \cdot \bar{v} = \text{állandó}$$

↓

$$\bar{v} = \frac{I_V}{A} = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta t}}{A} = \frac{9{,}33 \cdot 10^{-5}\, \frac{m^3}{s}}{3{,}14 \cdot 10^{-4}\, m^2} = 0{,}297\, \frac{m}{s} \approx 30\, \frac{cm}{s}$$

Válasz: A vér átlagos áramlási sebessége $30\, \frac{cm}{s}$ az aortában.

57. példa

Egy vértranszfúzió alkalmával a vért tartalmazó palackot 1,3 m-re a tű felett helyezik el. A tű belső átmérője 0,36 mm, hossza 3 cm. Egy perc alatt 4,5 cm³ vér folyik át a tűn. Számítsuk ki a vér viszkozitását!

Adatok:

- kapilláris sugara: $R = \frac{0{,}36}{2} mm = 1{,}8 \cdot 10^{-4} m$ *(szövegből)*
- kapilláris hossza: $l = 3\,cm = 3 \cdot 10^{-2} m$
- átfolyó térfogat: $4{,}5\,cm^3 = 4{,}5 \cdot 10^{-6} m^3$ *(szövegből)*
- idő: $t = 1\ perc = 60\,s$ *(szövegből)*
- vér sűrűsége: $\rho_{vér(átlagos)} = 1{,}05 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ *(táblázatból)*

Releváns törvények:

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{-\pi}{8\eta} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l}$$ *(Áramlás; III.12 – 3)*

- I_V: térfogati áramerősség
- V: térfogat
- t: idő
- π: pi $(\approx 3{,}14)$
- η: folyadék viszkozitása
- R: kapilláris sugara [m]
- p: nyomás
- l: kapilláris hossza [m]

$$\Delta p = \Delta p_{hidrosztatikai} = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

- Δp: hidrosztatikai nyomáskülönbség
- ρ: sűrűség
- g: nehézségi gyorsulás $\left(\approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}\right)$
- Δh: magasságkülönbség

Számolás:

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\pi}{8\eta} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

↓

$$\eta = \frac{\frac{-\pi}{8} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l}}{I_V}$$

$$\Delta p = \Delta p_{hidrosztatikai} = \rho \cdot g \cdot h = 1{,}05 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}3 = 13390{,}65\, Pa$$

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-6}\, m^3}{60\, s} = 7{,}5 \cdot 10^{-8} \frac{m^3}{s}$$

↓

$$\eta = \frac{\frac{-\pi}{8} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l}}{I_V} = \frac{\frac{-3{,}14}{8} \cdot \left(1{,}8 \cdot 10^{-4}\right)^4 \cdot \frac{13390{,}65}{3 \cdot 10^{-2}}}{7{,}5 \cdot 10^{-8}} = 2{,}452 \cdot 10^{-3}\, Pas \approx 2{,}5\, mPas$$

Válasz: A vér viszkozitása 2,5 mPas.

59. példa

4 mm belső átmérőjű artériában a vér áramlási sebessége a kritikus sebesség fele. Az artéria egy szakaszán a belső átmérő felére csökken. Stacionárius áramlást tételezve fel, mekkorák az átlagos áramlási sebességek és a kritikus sebességek a különböző keresztmetszeteknél?

Adatok:

- átmérő: $d_1 = 4\,mm$ → sugár: $\frac{d_1}{2} = r_1 = 2\,mm$ *(szövegből)*
- a vér áramlási sebessége: $\overline{v_1} = \frac{v_{krit1}}{2}$ *(szövegből)*
- lecsökkent átmérő: $d_2 = 2\,mm$ → lecsökkent sugár $r_2 = 1\,mm$ *(szövegből)*
- Reynolds-szám (sima falú csövekre): $R_e = 1160$ *(táblázatból)*
- a vér viszkozitása (37 ^{0}C-on): $\eta = 4{,}5\,mPa\cdot s = 4{,}5\cdot 10^{-3}\,Pa\cdot s$ *(táblázatból*
- a vér sűrűsége: $\rho_{vér} = 1{,}05\cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}$ *(táblázatból)*

Kérdések:

- $\overline{v_1} = ?$
- $\overline{v_2} = ?$
- $v_{krit1} = ?$
- $v_{krit2} = ?$

Releváns törvény:

$$v_{krit} = Re\cdot\frac{\eta}{\rho\cdot r}$$

(III. Transzportjelenségek élő rendszerekben; III.17)

Számolás:

$$v_{krit1} = 1160\,\frac{4{,}5}{1{,}05\cdot 10^3\cdot 2} = 2{,}486\,\frac{m}{s}$$

↓

$$\overline{v_1} = \frac{v_{krit1}}{2} = \frac{2{,}486}{2} = 1{,}243\,\frac{m}{s}$$

$$v_{krit2} = 1160\,\frac{4{,}5}{1{,}05\cdot 10^3\cdot 1} = 4{,}971\,\frac{m}{s}$$

$\overline{v_2} = 4\,\overline{v_1} = 4\cdot 1{,}243 = 4{,}972\,\frac{m}{s}$ (magyarázat: Ha az átmérő ($\rightarrow$sugár is) felére csökken, akkor a keresztmetszet az egy negyedére, hiszen $T_{kör} = r^2\cdot\pi$. Ebből következik, hogy ezen a helyen a vér áramlási sebességének a négyszeresére kell nőnie, mert a vér nem „torlódhat fel” sehol.)

Válasz: a, d = 4 mm: A vér átlagos áramlási sebessége 1,243 $\frac{m}{s}$, a kritikus sebesség 2,486 $\frac{m}{s}$.

b, d = 2 mm: A vér átlagos áramlási sebessége 4,972 $\frac{m}{s}$, a kritikus sebesség 4,971 $\frac{m}{s}$.

Mivel $\overline{v_2} > v_{krit2}$, ezért lecsökkent átmérő mellett az áramlás turbulens lesz.

61. példa

Egy 9 mm belső átmérőjű artériát vizsgálunk Doppler-ultrahang módszerrel. A kibocsátott ultrahang frekvenciája 8 MHz. A vizsgáló személy által hallott hang átlagos frekvenciája 1200 Hz. Mekkora a vér átlagos sebessége az artériában? Az ultrahang sebessége a testben 1500 m/s, és feltételezzük, hogy az az ér tengelyével párhuzamosan halad.

Adatok:

- $frekvencia_{ultrahang} = 8\,MHz = 8 \cdot 10^6\,Hz$

Releváns törvény:

$$f_D = \frac{2\,\upsilon}{c} \cdot f$$

(VIII. Képalkotó módszerek; VIII.5)

Számolás:

$$f_D = \frac{2\,\upsilon}{c} \cdot f$$

↓

$$\upsilon = \frac{\frac{f_D \cdot c}{f}}{2} = \frac{\frac{1200\,Hz \cdot 1500\,\frac{m}{s}}{8 \cdot 10^6\,Hz}}{2} = 0{,}1125\,\frac{m}{s} = 11{,}25\,\frac{cm}{s}$$

Válasz: A vér átlagos sebessége az artériában $11{,}25\,\frac{cm}{s}$.

75. példa

Hány dB változást jelent, ha a jelfeszültség a felére csökken?

Adatok:

- $U_{ki} = \frac{U_{be}}{2} = 0{,}5\,U_{be}$ (A kimenő feszültség a bemenő feszültség fele.)

Releváns törvények:

$$K_U = \frac{U_{ki}}{U_{be}}$$ *(Erősítő; 3)*

$$n = 20 \cdot lgK_U$$ *(Erősítő; 6)*

Számolás:

$$K_U = \frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{0{,}5\,U_{be}}{U_{be}} = \frac{1}{2}$$

$$n = 20 \cdot lgK_U = 20 \cdot lg\frac{1}{2} = -6\,dB$$

Válasz: Mínusz 6 dB változást jelent.

76. példa *Valakinek a hallásvesztesége adott frekvencián 40 dB.*

a) Mekkora intenzitású hangot vesz észre, ha az alkalmazott frekvencián a hallásküszöb 5·10^{-12} *W/m*^{2}*?*

Releváns törvény, számolás:

$$n = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$ (Audiometria; 5)

↓

$$40 = 10\lg\left(\frac{J}{5\cdot 10^{-12}}\right)$$

↓

$$\frac{40}{10} = 4 = lg\left(\frac{J}{5\cdot 10^{-12}}\right) \quad \rightarrow \quad J = 5\cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2}$$

Válasz: $5\cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2}$ intenzitású hangot vesz észre.

b) Ha ekkora intenzitású hangból egy fal 5·10^{-12} *W/m*^{2}*-t enged át, akkor azt mondjuk, hogy a fal hangszigetelő képessége 40 dB. Hányszoros felezési rétegvastagságú ez a fal?*

Releváns törvény, számolás:

$$J = J_0\cdot 2^{-\frac{x}{D}}$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő" anyaggal; II.12)*

↓

$$5\cdot 10^{-12} = 5\cdot 10^{-8}\cdot 2^{-\frac{x}{D}}$$

$$10^{-4} = 2^{-\frac{x}{D}}$$

$$-4 = -\left(\frac{x}{D}\cdot lg2\right)$$

$$\frac{x}{D} = 13{,}33$$

Válasz: 13,33-szoros felezési rétegvastagságú a fal.

c) Ha a fal 12 cm vastag, mekkora a fal anyagának felezési rétegvastagsága és gyengítési együtthatója erre a hangra?

<u>*Releváns törvény, számolás:*</u>

$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.11)*

↓

$5 \cdot 10^{-12} = 5 \cdot 10^{-8} \cdot e^{-12\mu}$

↓

$\ln\left(\frac{5 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-8}}\right) = \ln\left(10^{-4}\right) = -12\,\mu$

↓

$\mu = 0{,}77\,cm^{-1}$

$\mu = \frac{ln2}{D}$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.13)*

↓

$D = \frac{ln2}{\mu} = \frac{ln2}{0{,}77} = 0{,}9\,cm$

<u>Válasz:</u> Gyengítési együtthatója erre a hangra 0,77 cm^{-1}, felezési rétegvastagsága 0,9 cm.

77. példa

Mr. Süketet, akinek 30 dB hallásromlása van, 15-szörös felezőrétegnyi fal ellenére is zavarja a szomszéd házibuli. Csak akkor nem hallja, ha 45 dB csillapítást okozó füldugót használ. Mekkora hangintenzitás éri a falat a másik oldalon? (Egyszerűség kedvéért számoljunk úgy, mintha 1 kHz-es lenne a hang.)

Adatok:

- az emberi fül hallásküszöbe 1 kHz-en: $J_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$ *(táblázatból)*
- összes veszteség: 15-szörös felezőréteg (fal) + 30 dB (hallásromlás) + 45 dB (füldugó)

Releváns törvény:

$$n = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$ *(Audiometria; 5)*

Elmélet:

A kezdeti intenzitás csökkenésének (az „ideális” homo sapiens sapienshez képest, akinek nincs hallásromlása) 3 oka van (lásd fent). A fal „15-ször felezi” a kezdeti intenzitást. Ha x-szel jelöljük a kezdeti intenzitást, akkor a következő megállapítást tudjuk tenni: $J = \frac{x}{2^{15}}$. Csak ez jut át a fal egyik oldaláról a másikra (Mr. Sükethez). Ezenkívül 2 tényezővel kell még számolnunk: a hallásromlással és a füldugóval. Ezek összesen $30\,dB + 45\,db = 75\,dB$ csillapítást okoznak.

Számolás:

$$n = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right) = 75 \quad \leftarrow \quad n = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

↓

$$\frac{75}{10} = lg\left(\frac{J}{J_0}\right) = 7{,}5$$

↓ */matek*

$$\frac{J}{J_0} = 10^{7{,}5} = 3{,}1623\cdot 10^7$$

↓ */logika*

$$\frac{\frac{x}{2^{15}}}{J_0} = 3{,}1623\cdot 10^7$$

↓ */átrendezés és behelyettesítés*

$$x = 3{,}1623\cdot 10^7\cdot J_0\cdot 2^{15} = 3{,}1623\cdot 10^7\cdot 10^{-12}\cdot 2^{15} = 1{,}036 \approx 1\frac{W}{m^2}$$

Válasz: $1\frac{W}{m^2}$ hangintenzitás éri a falat a másik oldalon.

78. példa

Mekkora intenzitású 300 Hz-es hangot hall meg az az ember, akinek a hallásvesztesége ezen a frekvencián (ahol az átlagos hallásküszöb $3 \cdot 10^{-11}$ W/m²) 25 dB?

Adatok:

- hallásveszteség: $n = 25\,dB$
- átlagos hallásküszöb: $J_0 = 3 \cdot 10^{-11}\,\frac{W}{m^2}$

Releváns törvény:

$$n = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

(Audiometria; 5)

- n: hallásveszteség
- J: az az intenzitás, amit már meghall a halláskárosult ember
- J_0: átlagos hallásküszöb

Számolás:

$$n = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

↓

$$25 = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

↓

$$\frac{25}{10} = lg\left(\frac{J}{J_0}\right) = 2{,}5$$

↓ */matek*

$$\frac{J}{J_0} = 10^{2{,}5} = 316{,}228$$

↓ */átrendezés és behelyettesítés*

$$J = J_0 \cdot 316{,}228 = 3 \cdot 10^{-11} \cdot 316{,}228 = 949 \cdot 10^{-11} \approx 9{,}5 \cdot 10^{-9}\,\frac{W}{m^2}$$

Válasz: $9{,}5 \cdot 10^{-9}\,\frac{W}{m^2}$ intenzitású hangot hall meg.

85. példa

Az ultrahang echogramot oszcilloszkópon vettük fel. 5 kHz-es fűrészfrekvencia és 8 cm-es képszélesség esetén a testfelületről és egy belső felületről érkező echójelek 3 cm-re vannak egymástól. Milyen mélyen van a reflektáló réteg, ha az ultrahang testszövetbeli sebessége 1500 m/s?

<u>Adatok:</u>

- fűrészfrekvencia: $f = 5000\,Hz \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{5000\,s}$
- echójelek távolsága: $s = 3\,cm = 0{,}03\,m$
- képszélesség: $s = 8\,cm = 0{,}08\,m$

<u>Releváns törvények, számolás:</u>

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5000\,s} = 0{,}0002\,s$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{képszélesség}{periódusidő} = \frac{0{,}08\,m}{0{,}0002\,s} = 400\,m/s$$

$$t_2 = \frac{s}{v} = \frac{0{,}03\,m}{400\,m/s} = 7{,}5\cdot 10^{-5}\,s$$

$$s = v\cdot t = 1500\,\frac{m}{s}\cdot 7{,}5\cdot 10^{-5}\,s = 0{,}1125\,m = 11{,}25\,cm$$

ez a teljes út oda-vissza → a reflektáló tárgy távolsága ennek fele: $\frac{11{,}25\,cm}{2} = 5{,}625\,cm$

<u>Válasz:</u> 5,625 cm mélyen van a reflektáló réteg.

88. példa

a) Mekkora az ultrahang hullámhossza vízben, ha a frekvencia 800 kHz, és a vízbeli hangsebesség 1500 m/s?

b) Mekkora a reflexiós hányad izom és csont határán az alábbi táblázat alapján?

Adatok:

	izomban	csontban
hangsebesség (m/s)	1600	3600
sűrűség (kg/m^3)	1040	1700

- frekvencia: $f = 800\, kHz = 8 \cdot 10^5\, Hz$
- vízbeli hangsebesség: $c = 1500 \dfrac{m}{s} = 1{,}5 \cdot 10^3 \dfrac{m}{s}$

a) Releváns törvények és számolás

$c = \lambda \cdot f$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.26)*

- c: sebesség
- λ: hullámhossz
- f: frekvencia

↓

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1{,}5 \cdot 10^3\, m/s}{8 \cdot 10^5\, Hz} = 1{,}875\, m$$

Válasz: Az ultrahang hullámhossza vízben 1,875 m.

b) Releváns törvények és számolás

$Z = c \cdot \rho$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.67)*

- Z: akusztikus impedancia
- c: sebesség
- ρ: anyagsűrűség

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$ *(II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal; II.77)*

- R: reflexiós hányad
- Z: akusztikus impedancia

a táblázat alapján:

- $Z_1 = 3600 \cdot 1700 = 6120000$
- $Z_2 = 1600 \cdot 1040 = 1664000$

↓

$R = 0{,}33 \quad \rightarrow \quad 0{,}33 \cdot 100 = 33\,\%$

Válasz: 33 % a reflexiós hányad izom és csont határán.

91. példa *Mekkora feszültségre kell feltölteni egy defibrillátor 20 μF kapacitású kondenzátorát, hogy a defibrilláló impulzus energiája 160 J legyen?*

Adatok:

- kapacitás: $C = 20\mu F = 20 \cdot 10^{-6} F$
- energia: $E = 160 J$

Releváns törvény:

$$E_{kondenzátor} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)

- E: energia
- C: kapacitás
- U: feszültség

Számolás:

$$E_{kondenzátor} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

↓ */átrendezés és behelyettesítés*

$$U = \sqrt{\frac{E_{kondenzátor}}{\frac{1}{2} \cdot C}} = \sqrt{\frac{160}{\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = 4000 V = 4 kV$$

Válasz: 4 kV-ra kell feltölteni a kondenzátort.

92. példa

Szívritmusszabályozó (pacemaker) 1 ms időtartamú négyszögimpulzusainak feszültségamplitúdója 4 V. Mekkora egy impulzus energiája, ha az ingerelt területnek az elektródok közötti ellenállása 800 Ω?

Adatok:

- feszültség: $U = 4\,V$
- ellenállás: $R = 800\,\Omega$
- idő: $t = 1\,ms = 1 \cdot 10^{-3}\,s$

Releváns törvények:

$R = \dfrac{U}{I}$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

- R: ellenállás
- U: feszültség
- I: áramerősség

↓

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\,V}{800\,\Omega} = 0{,}005\,A$$

$P_{elektromos} = U \cdot I$ *(A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggés)*

- $P_{elektromos}$: elektromos teljesítmény
- U: feszültség
- I: áramerősség

↓

$$P_{elektromos} = 4\,V \cdot 0{,}005\,A = 0{,}02\,W$$

$$E = P \cdot t = 0{,}02\,W \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,s = 2 \cdot 10^{-5}\,J = 20 \cdot 10^{-6}\,J = 20\,\mu J$$

- E: energia
- P: teljesítmény
- t: idő

↓

$$E_{impulzus} = 20\,\mu J$$

Válasz: Egy impulzus energiája 20 μJ.

94. példa

Hányféleképpen építhető fel 20 -féle aminosavból inzulinhoz (51 AS) hasonló méretű polipeptidlánc?

$20^{51} = 2{,}25 \cdot 10^{66}$

↑

Ez nem kellene még kettővel elosztani?!

Képlettár

I. Az „élő” anyag legfontosabb szerkezeti tulajdonságai és szerepük a biológiai funkciókban

$$h f = E_m - E_i \qquad \text{(I.1)}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v} \qquad \text{(I.3)}$$

$$\Delta M = \left[Z \cdot m_p + \left(A - Z \right) \cdot m_n \right] - M \left(A, Z \right)$$

$$E = m c^2 \qquad \text{(I.19)}$$

$$n_i = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{k T}} \qquad R = N_A k \qquad \text{(I.25)}$$

$$\bar{\varepsilon}_{mozgási} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k T \qquad \text{(I.34)}$$

$$p V = N k T \qquad \text{(I.35)}$$

II. Sugárzások és kölcsönhatásuk az „élő” anyaggal

$$M = \frac{\Delta P}{\Delta A} \qquad \text{(II.2)}$$

$$E_{be} = \frac{\Delta P}{\Delta A} \qquad \sim \frac{1}{r^2}, \quad \sim \frac{1}{r} \qquad \text{(II.3)}$$

$$J_E = \frac{\Delta E}{\Delta t \, \Delta A} \qquad \text{a továbbiakban } J \qquad \text{(II.5)}$$

$$\Delta J = -\mu \, \Delta x \, J \qquad \text{(II.10)}$$

$$J = J_0 e^{-\mu x} \qquad \mu = \frac{1}{\delta} \qquad \text{(II.11)}$$

$$J = J_0 2^{-\frac{x}{D}} \qquad \text{(II.12)}$$

$$\mu = \frac{\ln 2}{D} \qquad \text{(II.13)}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21} \qquad \text{(II.14)}$$

$$D = \frac{n_2 - n_1}{r} \qquad \text{(II.17)}$$

$$D = D_1 + D_2 \qquad \text{(II.21)}$$

$$c = \frac{\lambda}{t}, \qquad \text{illetve} \qquad c = \lambda \cdot f \qquad \text{(II.26)}$$

$$J \sim A^2 \qquad \text{(II.27)}$$

$$J_1 + J_2 \neq J_{eredő} \qquad \text{(II.28)}$$

$$E_{mozgási} = h f - W_{ki} \qquad \text{(II.37)}$$

$$\frac{M_{\lambda_i}}{\alpha_{\lambda_i}} = \frac{M_{\lambda_j}}{\alpha_{\lambda_j}} \qquad \text{(II.39)}$$

$$M_{fekete}\left(T \right) = \sigma T^4 \qquad \text{(II.41)}$$

$$\Delta M = \sigma \left(T_{test}^4 - T_{környezet}^4 \right)$$

$$\lambda_{max} T = állandó \qquad \text{(II.42)}$$

$$\mu = K \left(N_1 - N_2 \right) \qquad \text{(II.56)}$$

$$P_{szórt} \sim \frac{{p_0}^2}{c^3} \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4} \qquad \text{(II.60)}$$

$$\kappa = \frac{\frac{-\Delta V}{V}}{\Delta p} \qquad \text{(II.63)}$$

$$Z = c \rho \qquad \text{(II.67)}$$

$$R = \frac{J_R}{J_0} \qquad \text{(II.76)}$$

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \qquad \text{(II.77)}$$

$$e U_{anód} = \varepsilon_{max} = h f_{max} \qquad \text{(II.79)}$$

$$\lambda_{min} = \frac{h c}{e U_{anód}} \qquad \text{(II.80)}$$

$$P_{Rtg} = c_{Rtg} {U_{anód}}^2 Z I_{anód} = \eta U_{anód} I_{anód} \qquad \text{(II.82)}$$

$$\mu = \mu_m \rho \qquad x_m = \rho x \qquad \text{(II.85)}$$

$$\varepsilon = h\,f = E_{kötési} + E_{mozgási} \qquad \text{(II.86)}$$

$$\tau_m = \frac{\tau}{\rho} = C_{foto} \lambda^3 Z^3 \qquad \text{(II.87)}$$

$$h\,f = E_{kötési} + h\,f' + E_{mozgási} \qquad \text{(II.89)}$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N \qquad \text{(II.95)}$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \lambda = \frac{1}{\tau} \qquad \text{(II.96)}$$

$$\lambda T = \ln 2 \qquad \frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{T_{fiz}} + \frac{1}{T_{biol}} \qquad \text{(II.98)}$$

$$\Lambda = -\frac{\Delta N}{\Delta t} \qquad \text{(II.99)}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{(II.101)}$$

$$\mu = \tau + \sigma + \kappa \qquad s = \frac{\Delta E}{\Delta x} \qquad s = s_m \rho \qquad \text{(II.102)}$$

$$h\,f = 2 m_e c^2 + 2 E_{mozgási} \qquad \text{(II.103)}$$

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta M} \qquad D_{levegő} = K_\gamma \frac{\Delta t}{r^2} \qquad \text{(II.105)}$$

$$x = \frac{\Delta Q}{\Delta m} \qquad \text{(II.106)}$$

$$D_{levegő} = f_0 X \qquad \text{(II.107)}$$

$$D \sim \mu_m J\,, \quad \text{illetve} \quad D \sim s_m$$

$$H_T = \sum_R w_R D_{TR} \qquad \text{(II.108)}$$

$$E = \sum_T w_T H_T \qquad \text{(II.110)}$$

$$S = \sum_i N_i E_i \qquad \text{(II.111)}$$

III. Transzportjelenségek élő rendszerekben

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{c\,\Delta t} \qquad \text{(III.1)}$$

$$I_V = A\overline{\upsilon} = állandó \qquad \text{(III.4)}$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = állandó \qquad \text{(III.5)}$$

$$F = \eta A \frac{\Delta \upsilon}{\Delta h} \qquad \text{(III.6)}$$

$$I_V = -\frac{\pi}{8\eta} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l} \qquad \text{(III.12)}$$

$$R_{cső} = 8 \Pi \eta \frac{\Delta l}{\left(r^2 \pi\right)^2} \qquad \text{(III.14)}$$

$$\upsilon_{krit} = R_e \frac{\eta}{\rho r} \qquad \text{(III.17)}$$

$$F = 6\pi \eta r\,\upsilon \qquad \text{(III.18)}$$

$$u = \frac{\upsilon}{F} \qquad \text{(III.19)}$$

$$l = \overline{\upsilon}\,\tau \qquad \text{(III.25)}$$

$$\upsilon_{drift} = \frac{F}{m}\tau \qquad \text{(III.26)}$$

$$I_N = \frac{\Delta N}{\Delta t} \qquad \text{(III.28)}$$

$$I_v = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{(III.29)}$$

$$J_v = \frac{\Delta I_v}{\Delta A} \qquad \text{(III.30)}$$

$$J_v = -D \frac{\Delta c}{\Delta x} \qquad \text{(III.31)}$$

$$D = \frac{1}{3}\upsilon\, l = u k T \qquad \text{(III.33)}$$

$$-\frac{\Delta J_V}{\Delta x}=\frac{\Delta c}{\Delta t} \tag{III.38}$$

$$D\frac{\Delta\left(\frac{\Delta c}{\Delta x}\right)}{\Delta x}=\frac{\Delta c}{\Delta t} \tag{III.39}$$

$$\sigma_x \sim \overline{R(t)} \sim \sqrt{Dt} \tag{III.40}$$

$$p_{ozmózis}=cRt \tag{III.50}$$

$$J_V=-L_T\frac{\Delta T}{\Delta x} \tag{III.51}$$

$$J_E=-\lambda\frac{\Delta T}{\Delta x} \tag{III.53}$$

$$J=LX \qquad J=\frac{\Delta x_{kül}}{A\Delta t} \qquad X=-\frac{\Delta y_{bel}}{\Delta x} \tag{III.54}$$

$$\Delta E=Q_E+W \qquad Q_E=cm\Delta T \tag{III.56}$$

$$W_V=-p\Delta V \qquad W_Q=\varphi\Delta Q \qquad W_V=\mu\Delta v$$

↑

(III.58)

$$W^{(i)}=y_{bel}{}^{(i)}\Delta x_{kül}{}^{(i)} \tag{III.59}$$

$$W_{vQ}=W_V+W_Q=(\mu+zF\varphi)\Delta v=\mu_e\Delta v$$

↑

(III.61)

$$Q_E=T\Delta S \tag{III.63}$$

$$\Delta E=\sum_{(i)} y_{bel}{}^{(i)}\Delta x_{kül}{}^{(i)} \tag{III.64}$$

$$\Delta S=\frac{\Delta E_1}{T_1}+\frac{\Delta E_2}{T_2}=\Delta E\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right) \tag{III.67}$$

$$S=k\ln\Omega \tag{III.72}$$

$$E=TS-pV+\mu v \tag{III.83}$$

$$H=E+pV \tag{III.84}$$

$$\Delta H_p=Q_E+W_V \tag{III.87}$$

$$\Delta H_{p,v}=Q_E \tag{III.88}$$

$$F=E-TS \tag{III.89}$$

$$\Delta F_T=W_V+W_v \tag{III.91}$$

$$\Delta F_{T,v}=W_V \tag{III.92}$$

$$\Delta F_{T,V}=W_v \tag{III.93}$$

$$G=H-TS \tag{III.94}$$

$$\Delta G_{T,p}=W_v \tag{III.96}$$

$$\Delta G_{T,p}\le 0 \tag{III.99}$$

$$\Delta F_{T,V}\le 0 \tag{III.100}$$

$$\Delta H_{S,p}\le 0 \tag{III.101}$$

$$G=\mu_A v_A+\mu_B v_B \tag{III.105}$$

$$\mu_A=\mu^0{}_A+RT\ln(c_A) \tag{III.109}$$

$$J_m=-p\left(c_{v_2}-c_{v_1}\right) \tag{III.113}$$

$$J_k=-L_K\frac{\Delta\mu_e}{\Delta x} \tag{III.116}$$

$$L_k=c_k\frac{D_k}{RT}=\frac{c_k u_k}{N_A} \tag{III.118}$$

$$J_k=-D_K\left(\frac{\Delta c_k}{\Delta x}+c_k\frac{z_k F}{RT}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right) \tag{III.119}$$

$$U=\frac{RT}{F}\ln\frac{\sum_{k=1}^{m} p_k{}^{+}c_{k,II}{}^{+}+\sum_{k=1}^{n} p_k{}^{-}c_{k,I}{}^{-}}{\sum_{k=1}^{m} p_k{}^{+}c_{k,I}{}^{+}+\sum_{k=1}^{n} p_k{}^{-}c_{k,II}{}^{-}}$$

↑

(III.121)

$$U=\varphi^{II}-\varphi^{I}=\frac{RT}{z_i F}\ln\frac{c_i{}^{I}}{c_i{}^{II}} \tag{III.123}$$

$$U_m(t)=U_t\left(1-e^{-\frac{t}{R_M C_M}}\right) \tag{III.130}$$

$$U_m(t)=U_t e^{-\frac{t}{R_M C_M}} \tag{III.132}$$

$$U_m(x)-U_m(0)=U_t e^{-\frac{x}{\lambda}} \tag{III.133}$$

IV. Az érzékszervek biofizikája

$$\Delta\,\psi \sim \frac{\Delta\,\Phi}{\Phi} \quad \text{(IV.5)}$$

$$\psi \sim \log\frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \text{(IV.6)}$$

$$\frac{\Delta\,\psi}{\psi} \sim \frac{\Delta\,\Phi}{\Phi} \quad \text{(IV.7)}$$

$$\psi \sim \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^n \quad \text{(IV.8)}$$

$$n_{oktáv} = \log_2\frac{f_2}{f_1} \quad \text{(IV.22)}$$

$$n = 10\,lg\left(\frac{J_1}{J_2}\right) \quad \text{(IV.25)}$$

$$n = 10\,lg\left(\frac{P_{ki}}{P_{be}}\right) = 10\,lg\left(\frac{J_{ki}}{J_{be}}\right) \quad \text{(IV.26)}$$

$$n = n_{erősítés} + n_{csillapítás} \quad \text{(IV.27)}$$

$$H_{phon} = 10\,lg\left(\frac{J}{J_0}\right) \quad \text{(IV.29)}$$

$$H_{son} = \frac{1}{16}\left(\frac{J}{J_0}\right)^{0,3} \quad \text{(IV.31)}$$

VI. A molekuláris és sejtdiagnosztika fizikai módszerei

$$N_{szög} = \frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha} = \alpha\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{k}\right) \quad \text{(VI.18)}$$

$$N_{szög} = -\frac{da}{f_1 f_2} \quad \text{(VI.23)}$$

$$\Delta\,s = d\sin\alpha_k = k\,\lambda \quad \text{(VI.24)}$$

$$\delta = 0{,}61\frac{\lambda}{n\sin\,\omega} \qquad f = \frac{1}{\delta} \quad \text{(VI.28)}$$

$$A = lg\left(\frac{J_0}{J}\right) = \varepsilon(\lambda)\,c\,x \quad \text{(VI.34)}$$

$$N = N_0\,e^{-(k_f + k_{nr})\,t} \quad \text{(VI.39)}$$

$$\tau = \frac{1}{k_f + k_{nr}} \quad \text{(VI.40)}$$

$$Q_f = k_f\,\tau \quad \text{(VI.41)}$$

$$p = \frac{J_{VV} - J_{VH}}{J_{VV} + J_{VH}} \quad \text{(VI.43)}$$

VII. Elektromos jelek és módszerek az orvosi gyakorlatban

$$U_R = U_T e^{-\frac{t}{RC}} \qquad U_C = U_T\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \text{(VII.2)}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi\,f\,C} \quad \text{(VII.4)}$$

$$U_{ki} = U_{be}\frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C{}^2}} \qquad f_h = \frac{1}{2\pi\,RC} \quad \text{(VII.5)}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi\sqrt{L\,C}}$$

$$K_U = \frac{U_{ki}}{U_{be}} \qquad K_P = \frac{P_{ki}}{P_{be}} \quad \text{(VII.6)}$$

$$K_P = K_U{}^2 \quad \text{ha} \quad R_{ki} = R_{be} \quad \text{(VII.8)}$$

$$n = 10\,lg\,K_P = 20\,lg\,K_U \quad \text{(VII.10)}$$

$$U_{ki} = \left(U_{be1} - U_{be2}\right)K_U \quad \text{(VII.11)}$$

$$K_{U_V} = \frac{K_U}{1 - K_{VU}\,K_U} \qquad K_{v_U} = \frac{U_{vissza}}{U_{ki}} \quad \text{(VII.14)}$$

VII. Képalkotó módszerek

$$lg\frac{J_0}{J} = (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 ...) lg\, e \qquad \text{(VIII.2)}$$

$$f_D = f' - f = \frac{\pm v}{c} f \qquad f_D = \frac{\pm 2v}{c} f \qquad \text{(VIII.5)}$$

$$h f_0 = g_N \mu_N H_0 \qquad \text{(VIII.3)}$$

$$HU = \frac{\mu - \mu_{víz}}{\mu_{víz}} 1000 \qquad \text{(VIII.10)}$$

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \qquad \text{(VIII.4)}$$

IX. Terápiás módszerek fizikai alapjai

$$a_{küszöb} = \frac{q}{\tau} + r$$

$$2r = \frac{q}{C} + r$$

Gyakorlatok

MIKROSZKÓP

$$D = \frac{1}{f} = (n_{21}-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (2)\ (II.23)$$

$$N_{szög} = -\frac{da}{f_1 f_2} \qquad (VI.23)$$

SPECIÁLIS MIKROSZKÓPOK

$$\Delta s = d \sin\alpha_k = k\lambda \qquad (1)\ (VI.24)$$

$$\delta = 0{,}61 \frac{\lambda}{n \sin\omega} \qquad (3)\ (VI.28)$$

REFRAKTOMÉTER

$$\frac{1}{\sin\beta_h} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \qquad (5)$$

$$n = n_0 + Kc \qquad (7)$$

FÉNYEMISSZIÓ

$$\lambda_{max} T = állandó \qquad (II.42)$$

$$hf = E_j - E_i \qquad (I.1)$$

FÉNYABSZORPCIÓ

$$T = \frac{J}{J_0}(100\%) \qquad (2)$$

$$A = lg\left(\frac{J_0}{J}\right) = \varepsilon(\lambda) c x \qquad (7)\ (VI.34)$$

A SZEM OPTIKÁJA

$$D = \frac{n}{t} + \frac{n'}{k} \qquad (1)\ (II.18)$$

$$\Delta D = D_p - D_r = \frac{1}{t_p} - \frac{1}{t_r} \qquad (4)$$

$$látásélesség(visus) = \frac{1(')}{\alpha(')}\% \qquad (6)$$

$$\alpha(') \approx \frac{a}{x}(rad)\frac{360(o)}{2\pi(rad)} 60\left(\frac{'}{o}\right) \qquad (7)$$

$$\alpha' = \frac{17\alpha}{x}\ (mm) \qquad (8)$$

$$receptorsűrűség \approx \frac{1}{(\alpha')^2}\left(\frac{1}{mm^2}\right) \qquad (9)$$

$$d_1' = 17\frac{d}{x_1}(mm) \qquad d_2' = 17\frac{d}{x_2}(mm) \qquad (11)$$

NUKLEÁRIS MÉRÉSTECHNIKA

$$N_j = N_{j+z} - N_z \qquad (2)$$

GAMMA ABSZORPCIÓ

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{2} = e^{-\mu D} \qquad (2)$$

$$x_{1/10} = 3{,}33\, D \qquad (5)$$

$$\mu = \frac{ln2}{D} \qquad (II.13)\ (3)$$

$$\mu = \mu_m \rho \qquad D_m = \rho D \qquad (II.85)$$

$$\mu_m = \tau_m + \sigma_m + \kappa_M \qquad (10)$$

GAMMA ENERGIA

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{U_1}{U_2} \qquad (1)$$

IZOTÓPDIAGNOSZTIKA

$$\frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{T_{fiz}} + \frac{1}{T_{biol}} \qquad (1)$$

RÖNTGEN – CT

$$D_i = lg\frac{J_{i_0}}{J_i} = lg\, e \cdot \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} \Delta x \qquad (6)$$

DOZIMETRIA

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta m} \qquad \text{(1 rad = 0,01 J/kg)} \qquad (1)$$

$$X = \frac{\Delta q}{\Delta m} \qquad \text{(1 R = 2,6} \cdot 10^{-4} \text{ C/kg)} \qquad (2)$$

$$D_{levegő} = f_0 X \qquad (3)\ (II.107)$$

$$D_{levegő} = K_\gamma \frac{\Lambda t}{r^2} \qquad (8)$$

$$U = \frac{Q}{C} \sim X \qquad (10)$$

$$U = IR = \frac{Q}{t} R \sim \frac{X}{t} \qquad (11)$$

$$P_{Rtg} = c_{Rtg} U_{anód}{}^2 Z I_{anód} \qquad (II.82)$$

UV - DOZIMETRIA

$$E_{be} = \frac{\Delta P}{\Delta A} \qquad (1)\ (II.3)$$

$$H = S E t \qquad (2)$$

$$A(t) = A_\infty + (A_0 - A_\infty) e^{-H_U} \qquad (5)$$

$$H_U = \ln \frac{A_0 - A_\infty}{A(t) - A_\infty} \qquad (6)$$

OSZCILLOSZKÓP

$$U_{pp} = 2 U_{max} = 2\sqrt{2} U_{eff} \qquad (5)$$

ERŐSÍTŐ

$$K_U = \frac{U_{ki}}{U_{be}} \qquad K_P = \frac{P_{ki}}{P_{be}} \qquad (3)\ (VII.6)$$

$$n = 20\, lg\, K_U + 10\, lg \frac{R_{be}}{R_{ki}} \quad (dB) \qquad (6)$$

SZINUSZOSZCILLÁTOR

$$K_{U_v} = \frac{K_U}{1 - K_v K_U} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (3)(VII.14)$$

$$Q = \sigma E^2 V t \qquad (4)$$

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \qquad Z = c\rho \qquad (5)\ (II.77)$$

IMPULZUSGENERÁTOR

$$T = \tau_1 + \tau_2 \qquad (2)$$

$$kitöltési\ tényező = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} 100\% \qquad (3)$$

COULTER SZÁMLÁLÓ

$$h = \frac{c_{megadott}}{c_{mért}} \qquad (1)$$

BŐRIMPEDANCIA

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \qquad (13)$$

$$\rho = RA \qquad (14)$$

$$C = \frac{1}{2\pi f Z} \qquad (15)$$

$$\gamma = \frac{C}{A} \qquad (16)$$

AUDIOMETRIA

$$J = \eta \frac{U_{eff}{}^2}{R} \qquad (1)$$

$$J_{saját} = A U^2 \quad (2)$$

$$n = 10\, lg\left(\frac{J}{J_0}\right) \quad (5)$$

SZENZOR

$$\psi \sim \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^n \quad (IV.8)$$

EKG

$$U_{ki} = \left(U_{be_1} - U_{be_2}\right) K_U \quad (VII.11)$$

$$U_I = \varphi_L - \varphi_R$$

$$U_{II} = \varphi_F - \varphi_R$$

$$U_{III} = \varphi_F - \varphi_L$$

ÁRAMLÁS

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = I_V = -\frac{\pi}{8\eta} R^4 \frac{\Delta p}{\Delta l} \quad (3)\ (III.12)$$

$$\eta = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\Delta V}\frac{\overline{\Delta h}\rho g}{l}\Delta t \quad (11)$$

$$\Delta p = R_{cső} I_V \qquad (U = RI)$$

$$R_{cső} = 8\pi\eta\frac{l}{A^2} \quad (6)$$

$$R_{párhuzamos\ eredő} = \frac{R}{n} \quad (7)$$

DIFFÚZIÓ

$$D \Delta t \frac{\Delta\left(\frac{\Delta c}{\Delta x}\right)}{\Delta x} + c(t) = c(t + \Delta t) \quad (4)$$

$$v = K v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (T = ln2 \cdot \tau) \quad (5)$$

$$D = 0{,}12\frac{r^2}{T} \quad (8)$$

$$\sigma_{elektrolit} = \frac{1}{R} C \quad (12)$$

A korábbi tanulmányokból ismertnek vélt összefüggések

$$E_{magassági} = mgh$$

$$E_{mozgási} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{kondenzátor} = \frac{1}{2} C U^2$$

$$\varepsilon = hf$$

$$n = \frac{c_{vákuum}}{c_{közeg}}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$R = \rho\frac{l}{A}$$

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$$

$$X_L = 2\pi f L$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{A}{d}$$

$$P_{elektromos} = UI$$

$$Q = c\, m\, \Delta t$$

Állandók és adatok

egyetemes gázállandó	$R = 8{,}31\, J/(mol \cdot K)$
Avogadro-szám	$N_A = 6 \cdot 10^{23} / mol$
Boltzmann-állandó	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\, J/K$
Faraday-állandó	$F = 96500\, C/mol$
Planck-állandó	$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s$
fénysebesség (vákuumban)	$c = 3 \cdot 10^{8}\, m/s$
elektron töltése (elemi töltés)	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C$
elektron nyugalmi tömege	$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg$
proton nyugalmi tömege	$m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\, kg$
neutron nyugalmi tömege	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\, kg$
Stefan-Boltzmann állandó	$\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\, J/(m^2 \cdot K^4 \cdot s)$
Reynolds-szám (sima falú csövekre)	$R_e = 1160$
c_{Rtg}	$1{,}1 \cdot 10^{-9}$
C_{foto}	$6\, cm^2/(g \cdot n\, m^3)$
f_0	$34\, J/C$

relatív atomtömeg	
nitrogén:	14
oxigén:	16
sűrűség [kg/m^3]	
alumínium (Al):	$2,7 \cdot 10^3$
vas (Fe):	$7,9 \cdot 10^3$
ólom (Pb):	$11,3 \cdot 10^3$
testszövet (lágy):	$1,04 \cdot 10^3$
vér (átlagos):	$1,05 \cdot 10^3$
levegő (0ºC, 101 kPa):	1,29
csont:	$1,7 \cdot 10^3$
zsírszövet:	$0,92 \cdot 10^3$
viszkozitás [mPa·s]	
víz (27ºC-on):	0,85
vér (37ºC-on):	4,5
fajhő [kJ/(kg·K)]	
víz:	4,18
izom:	3,76
vér:	3,9
tömör csont:	1,3
zsírszövet:	3
testszövet (átlagos):	3,5

fajhő [kJ/(kg·K)]	
oxigén: c_v	0,65
oxigén: c_p	0,92
olvadáshő [kJ/kg)	
jég:	334,4
párolgáshő [kJ/kg]	
víz (100ºC, 101 kPa):	2257
standard kémiai potenciál [kJ/mol]	
glükóz:	−902,5
törésmutató	
levegő:	1
víz:	1,333
cédrusolaj:	1,505
tömeggyengítési együttható [cm^2/g]	
μ_m (^{24}Na, ólom absz.):	$5 \cdot 10^{-2}$
hallásküszöb [W/m^2]	
emberi fül (1 kHz-en):	10^{-12}
hangsebesség [m/s]	
testszövet (lágy):	1600
csont:	3600
fajlagos vezetőképesség [S/m]	
izomszövet:	0,8

A fontosabb radioaktív izotópok jellemző adatai

kémiai elem és rendszáma		**izotóp**	**felezési idő**	**bomlás módja**	**maximális részecske energiák** (MeV)	**γ-energia** (MeV)	**Kγ dózis-konstans** $\left(\frac{\mu Gy_{lev}\cdot m^2}{GBq\cdot ¿h}\right)$
hidrogén	1	^{3}H	12,33 év	β^-	0,0186	–	
szén	6	^{11}C ^{14}C	20,4 perc 5760 év	β^+ β^-	0,96 0,155	–	
nitrogén	7	^{13}N	10 perc	β^+	1,19	–	
oxigén	8	^{15}O	2 perc	β^+	1,73	–	
fluor	9	^{18}F	109,8 perc	β^+	0,633	–	
nátrium	11	^{24}Na	15,02 óra	β^-, γ	1,392	2,754 1,369	444
foszfor	15	^{32}P	14,28 nap	β^-	1,710	–	
kén	16	^{35}S	87,2 nap	β^-	0,167	–	
kálium	19	^{40}K ^{42}K	$1{,}28\cdot10^9$ év 12,36 óra	β^-, K (10%) β^-, γ	1,31 3,52 (75%) 1,99 (25%)	1,46 K után 1,525	
kalcium	20	^{45}Ca	163 nap	β^-	0,257	–	
króm	24	^{51}Cr	27,7 nap	K, e^-, γ	0,315 (e^-)	0,320	
vas	26	^{52}Fe ^{59}Fe	8,2 óra 44,6 nap	β^+, γ β^-, γ	0,8 1,566	0,5 1,30 1,10	160
kobalt	27	^{60}Co	5,272 év	β^-, γ	0,318	1,33 1,17	305
réz	29	^{64}Cu	12,74 óra	β^- (39%) β^+ (19%) K (42%) γ (1%)	0,575 0,656	1,34	
kripton	36	^{85}Kr	10,73 év	β^-, γ	0,687	0,514	
rubídium	37	^{81}Rb ^{86}Rb	4,7 óra 18,65 nap	β^+, γ β^-, γ	0,99 1,78	1,93 0,95 1,078	
stroncium	38	^{90}Sr	29 év	β^-	0,546	–	
ittrium	39	^{90}Y	64 óra	β^-, γ (0,4%)	2,29	1,760	
technécium	43	$^{99}Tc^{m}$	6,02 óra	γ	–	0,140	
indium	49	$^{113}In^{m}$	1,658 óra	γ	–	0,91	
jód	53	^{123}I ^{125}I ^{131}I	13,3 óra 59,7 nap 8,04 nap	K, γ K, γ β^-, γ	– – 0,606 0,25 0,81	0,16 0,0355 0,364 0,080 0,723	54
xenon	54	^{133}Xe	5,29 nap	β^-, γ	0,346	0,081	
cézium	55	^{137}Cs	30,1 év	β^-, γ	0,512 (92,6%) 1,173 (7,4%)	0,661	80
arany	79	^{198}Au	2,695 nap	β^-, γ	0,961	0,411	
higany	80	^{203}Hg	46,6 nap	β^-, γ	0,212	0,279	
radon	86	^{222}Rn	3,824 nap	α	5,489	–	
rádium	88	^{226}Ra	1600 év	α, γ *(6%)*	4,784 4,598	0,186 0,260 0,609	
urán	92	^{238}U	$4{,}47\cdot10^9$ év	α, γ	4,2	0,048	